FORMULE PER IL CALCOLO DEI MOMENTI GEOMETRICI GENERALIZZATI DI FIGURE POLIGONALI

Maria Grazia D'URSO

Università degli Studi di Cassino - via G. Di Biagio, 43 - 03043 Cassino (FR). E-mail: durso@unicas.it

Riassunto
La trattazione presentata in (D'Urso, 2006) per il calcolo dei momenti generalizzati di figure piane, di ordine $z \leq 2$, mediante integrali estesi unicamente alla frontiera del dominio in cui esse sono definite, viene estesa al calcolo dei momenti di ordine 3. Nel caso di domini di forma poligonale, si illustra la metodologia che consente di calcolare in forma esatta i momenti suddetti mediante sommatorie. Infine, si riportano le formule esplicite relative ai momenti di ordine $z \leq 3$.

Abstract
The treatment presented in (D'Urso, 2006) for computing generalized moments of two-dimensional figures, of order $z \leq 2$, by means of integrals defined exclusively on the boundary of the domain on which the figures are defined, is here extended to the evaluation of moments of order 3. In the case of polygonal domains, it is illustrated the methodology which allows one to compute exactly the afore mentioned moments by means of finite sums. Finally, the explicit formulas pertaining to moments of order $z \leq 3$ are presented.

Introduzione
Un problema ricorrente nel processamento delle immagini è costituito dal calcolo dei momenti geometrici della regione occupata dall'immagine (Mukundan, Ramakrishnan, 1998), (Gonzales, Woods, 2002). Infatti, essi costituiscono proprietà fondamentali associate alla forma dell'oggetto e sono utili, ad esempio, per approssimare contorni estratti dall'oggetto (Shu *et al.*, 2002) attraverso ellissi (Haralic, Shapiro, 1992). Inoltre, le direzioni dominanti di un oggetto, valutabili in funzione dei momenti di ordine 2, sono fondamentali per le questioni relative alla calibrazione delle fotocamere (Kasser, Egels, 2002).
Tuttavia, in svariate applicazioni (D'Urso, 2006), è richiesto il calcolo di momenti ancora più complessi, denotati nel seguito *momenti generalizzati*. Detti p e q due interi non negativi, il momento generalizzato di ordine pq è definito da:

$$m_{pq} = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) x^p y^q dA \qquad [1]$$

in cui Ω è un dominio regolare del piano e $\mathbf{r}$ il raggio vettore che individua la posizione di un generico punto di Ω. In generale, posto $p+q=z$ e facendo variare sia p che q tra 0 e z, i momenti m_{pq} costituiscono le componenti del tensore:

$$\mathbf{M}_z = \int_{\Omega} g(\mathbf{r}) \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \ldots \otimes \mathbf{r}}_{z \text{ volte}} dA. \qquad [2]$$

Si assume inoltre che la funzione scalare g introdotta nelle espressioni precedenti sia definita da:

$$g(x,y) = (f \circ h)(x,y) = f[h(x,y)] \qquad [3]$$

come composizione di una arbitraria funzione scalare f e di una funzione affine h delle coordinate:

$$h(x,y) = a + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = a + g_x x + g_y y \qquad [4]$$

in cui a, g_x e g_y sono costanti arbitrarie. Si supporrà, inoltre, che la funzione f sia continua e dotata di primitive di ordine opportuno.

Espressione dei momenti generalizzati di domini piani mediante integrali di frontiera

Come mostrato in (D'Urso, 2006) nel caso $z \leq 2$, il calcolo dei momenti generalizzati può essere notevolmente semplificato trasformando gli integrali di superficie in integrali di linea mediante una opportuna applicazione del teorema di Gauss. In particolare, è stato preliminarmente dimostrato il seguente risultato:

$$f(h) = div(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}) \qquad [5]$$

utile per il calcolo di $\mathbf{M}_0$ o area generalizzata. Nella espressione precedente *div* rappresenta l'operatore divergenza, $f^{(+1)}$ è una primitiva della funzione f e $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/(\mathbf{g}\cdot\mathbf{g})$. Si ricorda che quest'ultima quantità è ben definita poiché si è interessati al caso non banale $\mathbf{g} \neq \mathbf{o}$ e che la scelta della costante di integrazione nella definizione della primitiva $f^{(+1)}$ è del tutto inessenziale.

Ulteriori risultati, dimostrati in (D'Urso, 2006) e utili nel seguito, sono:

$$f(h)\mathbf{r} = div[f^{(+1)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}} = div[f^{(+1)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+2)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\hat{\mathbf{g}} \qquad [6]$$

necessaria per il calcolo di $\mathbf{M}_1$ e:

$$\begin{aligned} f(h)(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}) &= div[f^{(+1)}(h)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - f^{(+1)}(h)(\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r} + \mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}) = \\ &= div[f^{(+1)}(h)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\otimes\hat{\mathbf{g}} + \qquad [7] \\ &\quad - \hat{\mathbf{g}}\otimes div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] + 2div[f^{(+3)}(h)\hat{\mathbf{g}}](\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}) \end{aligned}$$

necessaria per il calcolo di $\mathbf{M}_2$. Si noti che la seconda uguaglianza nella formula [6] scaturisce dalla applicazione della [5] al termine $f^{(+1)}(h)$ e che la seconda uguaglianza nella [7] scaturisce dalla applicazione della [6] al termine $f^{(+1)}(h)\mathbf{r}$.

Appare evidente dalle [5], [6] e [7] che i termini a primo membro sono esprimibili unicamente in funzione di operatori divergenza o come composizione, vettoriale o tensoriale, di tali operatori con tensori costanti costituiti dal prodotto del vettore $\hat{\mathbf{g}}$. Pertanto, come mostrato in (D'Urso, 2006), gli integrali di dominio dei primi membri possono esprimersi mediante integrali di linea, estesi alla frontiera di Ω, di più semplice valutazione. Si ottiene infatti:

$$\int_\Omega f(h)dA = \int_\Omega div(f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}})dA = \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds \qquad [8]$$

per $\mathbf{M}_0$:

$$\int_\Omega f(h)\mathbf{r}dA = \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)\mathbf{r}(s)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds - \left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right]\hat{\mathbf{g}} \qquad [9]$$

per $\mathbf{M}_1$ e:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(h)(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})dA &= \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)\left(\mathbf{r}(s)\otimes\mathbf{r}(s)\right)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds + \\ &\quad -\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}(s) + \mathbf{r}(s)\otimes\hat{\mathbf{g}}][\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds + \qquad [10] \\ &\quad +2\left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+3)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right](\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}) \end{aligned}$$

per $\mathbf{M}_2$. Si può estendere al caso di $\mathbf{M}_3$ la metodologia illustrata in (D'Urso, 2006) come segue:

$$\begin{aligned} \left\{div[\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\right\}_{ijk} &= (x_i x_j x_k f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell)_{/\ell} \\ &= x_{i/\ell}x_j x_k f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell + x_i x_{j/\ell}x_k f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell + \\ &\qquad + x_i x_j x_{k/\ell} f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell + x_i x_j x_k \frac{\partial f^{(+1)}}{\partial h} h_{/\ell}\hat{g}_\ell \qquad [11] \\ &= \hat{g}_i x_j x_k f^{(+1)}(h) + x_i\hat{g}_j x_k f^{(+1)}(h) + x_i x_j \hat{g}_k f^{(+1)}(h) + x_i x_j x_k f(h) \\ &= \left\{f^{(+1)}(h)(\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r} + \mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r} + \mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}) + f(h)(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})\right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Mentre il primo ed il terzo termine a secondo membro possono essere trasformati tramite la [7] il secondo termine richiede una ulteriore applicazione del teorema della divergenza:

$$\begin{aligned}
\left\{div[\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}\otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\right\}_{ijk} &= (x_i\hat{g}_j x_k f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell)_{/\ell} \\
&= x_{i/\ell}\hat{g}_j x_k f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell + + x_i\hat{g}_j x_{k/\ell} f^{(+1)}(h)\hat{g}_\ell + x_i\hat{g}_j x_k \frac{\partial f^{(+1)}}{\partial h} h_{/\ell}\hat{g}_\ell \\
&= \hat{g}_i\hat{g}_j x_k f^{(+1)}(h) + x_i\hat{g}_j\hat{g}_k f^{(+1)}(h) + x_i\hat{g}_j x_k f(h) \\
&= \left\{f^{(+1)}(h)(\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}+\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}) + f(h)(\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r})\right\}_{ijk}
\end{aligned} \qquad [12]$$

In tal modo, sfruttando la [6], l'espressione precedente diventa:

$$\begin{aligned}
f(h)(\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}) &= div[\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}\otimes f^{(+1)}(h)\hat{\mathbf{g}}] - \\
&- \hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\left\{div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+3)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\hat{\mathbf{g}}\right\} \\
&- \left\{div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+3)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\hat{\mathbf{g}}\right\}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}
\end{aligned} \qquad [13]$$

In definitiva, sfruttando la [7] e la relazione precedente, la [11] diventa:

$$\begin{aligned}
f(h)(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}) &= div[f^{(+1)}(h)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - \\
&- \hat{\mathbf{g}}\otimes div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\otimes\hat{\mathbf{g}} + \\
&+ \hat{\mathbf{g}}\otimes\left\{div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\otimes\hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}}\otimes div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\right\} + \\
&+ \left\{div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\otimes\hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}}\otimes div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}]\right\}\otimes\hat{\mathbf{g}} + \\
&- 4div[f^{(+4)}(h)\hat{\mathbf{g}}](\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}) - div[f^{(+2)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] + \\
&+ \hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\left\{div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+4)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\hat{\mathbf{g}}\right\} + \\
&\left\{div[f^{(+3)}(h)\mathbf{r}\otimes\hat{\mathbf{g}}] - div[f^{(+4)}(h)\hat{\mathbf{g}}]\hat{\mathbf{g}}\right\}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}
\end{aligned} \qquad [14]$$

in cui non sono stati raggruppati i termini uguali relativi ai termini $\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes(\cdot)$ per comodità del lettore. Pertanto, risulta:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(h)(\mathbf{r}\otimes\mathbf{r}\otimes\mathbf{r})dA &= \int_{Fr(\Omega)} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\mathbf{r}(s)\otimes\mathbf{r}(s)\otimes\mathbf{r}(s)][\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds + \\
&-\hat{\mathbf{g}}\otimes\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\mathbf{r}(s)\otimes\mathbf{r}(s)][\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds + \\
&-\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\mathbf{r}(s)\otimes\mathbf{r}(s)][\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\otimes\hat{\mathbf{g}} + \\
&+2\hat{\mathbf{g}}\otimes\left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+3)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)\mathbf{r}(s)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right]\otimes\hat{\mathbf{g}} + \\
&+2\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+3)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)\mathbf{r}(s)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right] + \\
&+2\left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+3)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)\mathbf{r}(s)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right]\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}} + \\
&-6\left[\int_{Fr(\Omega)} f^{(+4)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds\right]\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\hat{\mathbf{g}} \\
&-\int_{Fr(\Omega)} f^{(+2)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\mathbf{r}(s)\otimes\hat{\mathbf{g}}\otimes\mathbf{r}(s)][\hat{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}(s)]ds
\end{aligned} \qquad [15]$$

Come mostrato nel seguito, i momenti $\mathbf{M}_0 \ldots \mathbf{M}_3$ possono essere ottenuti tramite sommatorie nel caso, assai frequente nelle applicazioni, in cui la frontiera del dominio Ω sia costituito da, o sia assimilabile ad, una poligonale.

Calcolo dei momenti generalizzati di figure poligonali

Si vogliono ora specializzare le espressioni [8], [9], [10], e [15] al caso in cui la frontiera di Ω, d'ora in avanti denotata con $\mathrm{Fr}(\Omega_{pg})$, sia costituita da una poligonale; essa è definita da n lati, numerati consecutivamente assumendo sulla frontiera un assegnato verso di percorrenza. Il lato *i*-

esimo della poligonale, definito dai vertici $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_{i+1}$, ha lunghezza $\ell_i = |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|$.
Per fissare le idee si farà riferimento alla formula [8] relativa al calcolo di $\mathbf{M}_0$. Risulta, pertanto:

$$\mathrm{M}_0 = \int_{\Omega_{pg}} f(h) dA = \int_{Fr(\Omega_{pg})} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s)]\right)[\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}(s)] ds = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^{\ell_i} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s_i)]\right) ds_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \right] \qquad [16]$$

in cui s_i è l'ascissa curvilinea relativa al lato i-esimo, con origine nel vertice i, e $\mathbf{n}_i$ il versore della normale al lato i-esimo, dunque indipendente da s_i. Essendo:

$$\mathbf{r}(s_i) = \mathbf{r}_i \left(1 - \frac{s_i}{\ell_i}\right) + \mathbf{r}_{i+1} \frac{s_i}{\ell_i} \qquad [17]$$

risulta, in base alla definizione [4] della funzione h:

$$\begin{aligned} h[\mathbf{r}(s_i)] &= a + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}(s_i) = a\left(1 - \frac{s_i}{\ell_i} + \frac{s_i}{\ell_i}\right) + \left(1 - \frac{s_i}{\ell_i}\right) \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i + \frac{s_i}{\ell_i} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i+1} = \\ &= \left(1 - \frac{s_i}{\ell_i}\right)(a + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_i) + \frac{s_i}{\ell_i}(a + \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{i+1}) = \left(1 - \frac{s_i}{\ell_i}\right) h(\mathbf{r}_i) + \frac{s_i}{\ell_i} h(\mathbf{r}_{i+1}) = \qquad [18] \\ &= \left(1 - \frac{s_i}{\ell_i}\right) h_i + \frac{s_i}{\ell_i} h_{i+1} \end{aligned}$$

Disponendo della specifica espressione della f, e dunque della sua primitiva $f^{(+1)}$, si ottiene nella [16] un integrale in s_i che può essere valutato caso per caso. Ad esempio, nel caso di una funzione polinomiale, occorre calcolare gli integrali di monomi del tipo $(s_i / \ell_i)^k$ dove k è un esponente di ordine opportuno dipendente dal grado della funzione polinomiale f.
Per maggiore generalità, tuttavia, si illustra nel seguito una procedura alternativa che prescinde dalla particolare espressione della funzione f. A tale scopo risulta conveniente nella [16] esprimere s_i in funzione di h sicchè, essendo $\mathrm{d}h = \left((h_{i+1} - h_i) / \ell_i\right) \mathrm{d}s_i$ in base alla [18], si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} f^{(+1)}\left(h[\mathbf{r}(s_i)]\right) ds_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{h_{i+1} - h_i} \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+1)}(h) dh \qquad [19]$$

Si noti che l'espressione precedente risulta non definita quando $h_{i+1} = h_i$ ossia quando l'i-esimo lato è ortogonale al gradiente $\hat{\mathbf{g}}$. In tal caso il teorema dell'Hopital [Kreyszig, 1993] fornisce:

$$\lim_{h^* \to h_i} \frac{\int_{h_i}^{h^*} f^{(+1)}(h) dh}{h^* - h_i} = f^{(+1)}(h_i) \qquad [20]$$

Pertanto, in virtù della [19] e della relazione precedente, la [16] si scrive:

$$\mathrm{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+1)}] = \sum_{i=1}^{n} \ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \begin{cases} \dfrac{f^{(+2)}(h_{i+1}) - f^{(+2)}(h_i)}{h_{i+1} - h_i} & \text{se } h_{i+1} \neq h_i \\ f^{(+1)}(h_i) & \text{se } h_{i+1} = h_i \end{cases} \qquad [21]$$

Come risulterà chiaro nel seguito, la nomenclatura appena introdotta deve essere opportunamente estesa per poter procedere al calcolo dei momenti generalizzati di ordine superiore. In particolare, risulta necessario calcolare i seguenti integrali relativi ad una generica funzione χ e ad interi $k \geq 1$:

$$\mathrm{I}_i^{(k)}[\chi] = \frac{1}{(h_{i+1} - h_i)^{k+1}} \int_{h_i}^{h_{i+1}} \chi(h)(h - h_i)^k dh \qquad [22]$$

Prima di procedere al calcolo generale della quantità appena definita si considera il caso particolare in cui $h_{i+1} = h_i$. Applicando ancora una volta il teorema dell'Hopital risulta:

$$\lim_{h^* \to h_i} \int_{h_i}^{h^*} \chi(h)(h - h_i)^k \, dh / \left(h^* - h_i\right)^{k+1} = \frac{1}{k+1} \chi(h_i) \qquad [23]$$

Viceversa, quando $h_{i+1} \neq h_i$, l'integrale [22] può essere calcolato in forma esatta operando k successive integrazioni per parti. E' possibile infatti dimostrare che, operando in tal modo, si ottiene per una assegnata funzione continua χ, dotata di primitive di ordine $k+1$, il seguente risultato:

$$\int_{h_i}^{h_{i+1}} \chi(h)(h-h_i)^k dh = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} k!}{(k-j+1)!} \int_{h_i}^{h_{i+1}} d\left[\chi^{(+j)}(h)(h-h_i)^{k-j+1}\right] + (-1)^k k! \int_{h_i}^{h_{i+1}} \chi^{(+k)}(h)\, dh \qquad [24]$$

sicchè

$$\int_{h_i}^{h_{i+1}} \chi(h)(h-h_i)^k dh = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} k!}{(k-j+1)!} \chi^{(+j)}(h_{i+1})(h_{i+1}-h_i)^{k-j+1} + (-1)^k [\chi^{(k+1)}(h_{i+1}) - \chi^{(k+1)}(h_i)] \qquad [25]$$

Applicando il risultato precedente alla [22], ed in considerazione della [23] si ottiene, per k=1:

$$\mathrm{I}_i^{(1)}[\chi] = \begin{cases} \dfrac{\chi^{(+1)}(h_{i+1})}{h_{i+1}-h_i} - \dfrac{\chi^{(+2)}(h_{i+1}) - \chi^{(+2)}(h_i)}{(h_{i+1}-h_i)^2} & \text{se } h_{i+1} \neq h_i \\ \dfrac{1}{2}\chi(h_i) & \text{se } h_{i+1} = h_i \end{cases} \qquad [26]$$

Inoltre:

$$\mathrm{I}_i^{(2)}[\chi] = \begin{cases} \dfrac{\chi^{(+1)}(h_{i+1})}{h_{i+1}-h_i} - \dfrac{2}{(h_{i+1}-h_i)^2}\left[\chi^{(+2)}(h_{i+1}) - \dfrac{\chi^{(+3)}(h_{i+1}) - \chi^{(+3)}(h_i)}{h_{i+1}-h_i}\right] & \text{se } h_{i+1} \neq h_i \\ \dfrac{1}{3}\chi(h_i) & \text{se } h_{i+1} = h_i \end{cases} \qquad [27]$$

e:

$$\mathrm{I}_i^{(3)}[\chi] = \begin{cases} \dfrac{\chi^{(+1)}(h_{i+1})}{h_{i+1}-h_i} - \dfrac{3}{(h_{i+1}-h_i)^2}\left[\chi^{(+2)}(h_{i+1}) - 6\dfrac{\chi^{(+3)}(h_{i+1})}{h_{i+1}-h_i} + \right. \\ \qquad\qquad \left. +6\dfrac{\chi^{(+4)}(h_{i+1}) - \chi^{(+4)}(h_i)}{(h_{i+1}-h_i)^2}\right] & \text{se } h_{i+1} \neq h_i \\ \dfrac{1}{4}\chi(h_i) & \text{se } h_{i+1} = h_i \end{cases} \qquad [28]$$

Infine, ricavando il rapporto s_i / ℓ_i dalla [18] e sostituendolo nella [17], si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h) = \mathbf{r}_i + \frac{h-h_i}{h_{i+1}-h_i}(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) = \mathbf{r}_i + \lambda_i(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i); \quad (h_{i+1} \neq h_i) \qquad [29]$$

Adottando la simbologia appena introdotta e la metodologia illustrata per derivare $\mathbf{M}_0$, si ottiene dalla [9]:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i)}{h_{i+1}-h_i} \left\{ \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+1)}(h)\tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h)\, dh - \left[\int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+2)}(h)\, dh\right]\hat{\mathbf{g}} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i)}{h_{i+1}-h_i} \left\{ \mathbf{r}_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+1)}(h)\, dh + \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{h_{i+1}-h_i} \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+1)}(h)(h-h_i)\, dh + \right. \\ &\qquad \left. - \left[\int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+2)}(h)\, dh\right]\hat{\mathbf{g}} \right\} = \\ &= \ell_i(\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i)\left\{ (\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+1)}] - \mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}])\mathbf{r}_i + \mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}]\mathbf{r}_{i+1} - (\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+2)}])\hat{\mathbf{g}} \right\} \end{aligned} \qquad [30]$$

Analogamente, si ricava dalla [10]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_2 \; = \; & \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i)}{h_{i+1} - h_i} \Big\{ \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+1)}(h) \big[\tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h) \otimes \tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h) \big] dh - \\
& - \int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+2)}(h) \big[\tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h) \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \tilde{\mathbf{r}}^{(i)}(h) \big] dh + \\
& + 2 \Big[\int_{h_i}^{h_{i+1}} f^{(+3)}(h) dh \Big] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \Big\} = \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i)}{h_{i+1} - h_i} \Big\{ \int_{h_i}^{h_{i+1}} \Big\{ f^{(+1)}(h) \big[(1-\lambda_i)^2 (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + (\lambda_i - \lambda_i^2)(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \lambda_i^2 (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) \big] - f^{(+2)}(h) \big[(1-\lambda_i)(\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& \lambda_i (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) + 2 f^{(+3)}(h) (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) \Big\} dh = \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} \ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \Big\{ \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+1)}] - 2\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}] + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \big(\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}] - \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) - \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+2)}] - \mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) + 2\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+3)}] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}})
\end{aligned}
\qquad [31]
$$

Infine, posto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} \; = \; & \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+2)}] - 2\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \big(\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] - \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1})
\end{aligned}
\qquad [32]
$$

risulta, omettendo i calcoli per ragioni di spazio:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_3 \; = \; & \sum_{i=1}^{n} \ell_i (\hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{n}_i) \Big\{ \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+1)}] - 3\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}] + 3\mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] - \mathrm{I}_i^{(3)}[f^{(+1)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \big(\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+1)}] - 2\mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] + \mathrm{I}_i^{(3)}[f^{(+1)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i + \\
& + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) + \big(\mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+1)}] - \mathrm{I}_i^{(3)}[f^{(+1)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \\
& + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathrm{I}_i^{(3)}[f^{(+1)}] (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) - \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{T} - \mathbf{T} \otimes \hat{\mathbf{g}} + \\
& + 2 \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+3)}] - \mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+3)}] \big) (\hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + \\
& + 2\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+3)}] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + \\
& - 12\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+4)}] (\hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \hat{\mathbf{g}}) + \big(\mathrm{I}_i^{(0)}[f^{(+2)}] - 2\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i) + \\
& + \big(\mathrm{I}_i^{(1)}[f^{(+2)}] - \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] \big) (\mathbf{r}_i \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathrm{I}_i^{(2)}[f^{(+2)}] (\mathbf{r}_{i+1} \otimes \hat{\mathbf{g}} \otimes \mathbf{r}_{i+1}) \Big\}
\end{aligned}
\qquad [33]
$$

Bibliografia

D'Urso M.G. (2006), "Momenti geometrici generalizzati di figure piane", *Atti della X Conferenza Nazionale ASITA*, Bolzano.
Gonzales L., Woods R. (2002), *Digital Image Processing*, 2nd ed., Prentice Hall.
Haralic R.M., Shapiro L.G. (1992), *Computer and Robot Vision*, Addison-Wesley, vol. I.
Kasser M., Egels Y. (2002), *Digital Photogrammetry*, Taylor & Francis, London.
Kreyszig, E. (1993), Advanced Engineering Mathematics, Wiley.
Mukundan R., Ramakrishnan K.R. (1998), *Moment Functions in Image Analysis - Theory and Applications*, World Scientific.
Shu H.Z., Luo L.M., Zhou J.D., Bao X.D. (2002), "Moment-based methods for polygonal approximation of digitised curves", *Pattern Recognition*, 35: 421-434.