

LASER SCANNING TERRESTRE: INFLUENZA DELLA PROCEDURA DI ALLINEAMENTO SULLA PRECISIONE DEL MODELLO RESTITUITO

Massimo CHILLEMI, Luigi GIACOBBE¹

DISIA Facoltà di Ingegneria Università di Messina, 0903977208, massimochillemi@tingegneria.unime.it, luiggiacobbe@libero.it

Riassunto

Il laser scanning è una tecnica di rilievo di estrema versatilità, applicata a campi ben differenti, quali la cartografia, il rilievo architettonico, la pianificazione territoriale, il monitoraggio e controllo delle deformazioni e dei dissesti e la costruzione di opere in galleria, che deve essere di volta in volta utilizzata con piena coscienza dei limiti di precisione conseguibili, non tanto con riferimento alla singola scansione ma, soprattutto, in relazione al modello finale restituito.

Un ruolo fondamentale nella procedura di rilievo e restituzione con laser scanner è quindi ricoperto dalla fase di allineamento delle scansioni, ovvero da quell'insieme di operazioni, che consentono di ricostruire il legame geometrico tra i modelli parziali rilevati.

La presente nota si riferisce ad un'esperienza di rilievo realizzata di concerto con la "Archilab s.a.s. di Paolo Zappulla & C.", società con sede in Floridia (SR), che opera nel campo del rilievo architettonico. I dati acquisiti hanno consentito di elaborare dei test di allineamento fra più coppie di scansioni, che hanno evidenziato come, in assenza di un opportuno e preventivo progetto della fase di acquisizione, possano essere introdotte nel modello finale approssimazioni non compatibili con le finalità del rilievo.

Abstract

The laser scanning is a technique of survey of extreme versatility, applied to well different fields, what the cartography, the architectural survey, the territorial planning, the control of the deformations and of the disarrangements and the construction in gallery, that has to be of time in time used with full conscience of the achievable limits of precision, not so much with reference to the single scanning but, above all, in relationship to the returned final model.

A fundamental role in the procedure of survey and restitution with laser scanners has covered therefore by the phase of alignment of the scannings, that is the operation, through which the final model is reconstructed. The present note refers to an experience of survey realized of concert with "Archilab s.a.s. of Paolo Zappulla & C.", society headquartered in Floridia (SR), that operates in the field of the architectural survey. The acquired data have allowed to elaborate some tests of alignment among more couples of scannings, that have underlined as, in absence of an opportune planning of the phase of acquisition, can be introduced in the final model non compatible approximations with the finalities of the survey.

1. Finalità dell'allineamento e tecniche di registrazione

Un uso appropriato della metodologia laser scanning 3D richiede l'approntamento di un accurato progetto del modello finale già in una fase precedente al rilievo, quando è necessario predisporre le opportune condizioni operative per garantire il conseguimento del risultato atteso anche in termini di precisione. La possibilità offerta dal laser scanner di posizionare un punto nello spazio con una precisione elevata (di ordine sub-millimetrico per i laser triangolatori a piccola portata, da ± 3 mm a ± 7 mm per i laser distanziometrici a media portata) è un patrimonio di fondamentale importanza, che però può essere depauperato da una procedura di rilievo e restituzione non adeguata.

In particolare, il problema si pone quando la forma, l'estensione e/o le condizioni di accessibilità visiva dell'oggetto da rilevare non ne consentono l'acquisizione con una sola scansione ed occorre quindi operare con più stazioni di presa, ognuna delle quali riferita ad un particolare sistema di riferimento locale arbitrariamente orientato. Di conseguenza, i modelli risultanti dalle singole scansioni sono fra loro indipendenti e privi di una relazione geometrica nota.

In fase di restituzione sarà quindi indispensabile ricostruire il legame geometrico tra i modelli parziali rilevati, che dovranno essere georeferenziati rispetto ad un unico sistema di riferimento

¹ Il contributo dei due Autori alla stesura del presente articolo è da intendersi paritetico.

predefinito, introducendo inevitabilmente, per effetto dell'incertezza di posizionamento dei punti, ulteriori approssimazioni. Allineare due scansioni significa quindi renderle congruenti e tale obiettivo viene conseguito determinando i parametri delle trasformazioni geometriche necessarie per rappresentare le coordinate di tutti i punti in un sistema di riferimento comune.

L'allineamento (o registrazione) dei modelli laser scanner può essere definito (Beinat, Crosilla) come un "insieme di tecniche mediante le quali modelli rilevati con diverse scansioni, espressi ognuno in un proprio sistema di riferimento, sono riferiti al medesimo datum".

Le tecniche utilizzate possono essere essenzialmente ricondotte alle seguenti metodologie:

- ❖ allineamento mediante individuazione di punti omologhi;
- ❖ allineamento mediante sovrapposizione di "patches" comuni;
- ❖ allineamento analitico tramite Analisi Procustiana.

La prima di queste tecniche, di chiara derivazione fotogrammetrica, consiste nella ricerca ed accoppiamento di punti omologhi in modelli diversi nelle aree di sovrapposizione.

Per utilizzare con risultati soddisfacenti tale procedura, è necessario garantire un ricoprimento del 30% tra due scansioni laser adiacenti. I punti omologhi possono essere di tipo naturale, cioè già presenti all'interno dell'area oggetto di scansione, ovvero presegnalizzati, cioè appositamente introdotti mediante l'inserimento di placchette rifrangenti e di altri segnali geometrici. La procedura di registrazione mediante sovrapposizione di "patches" comuni, proposta nel 1992 da Besl e McKay, viene spesso definita Iterative Closet Point (I.C.P.) ed è una tecnica iterativa, che però necessita di un allineamento iniziale sommario dei modelli. Assegnati due insieme di punti p_i e q_i , rispettivamente afferenti alle due scansioni P e Q di un oggetto, la procedura iterativa prevede i seguenti step:

- 1) si cerca il punto appartenente alla superficie di P più vicino a ciascun punto dell'insieme Q;
- 2) si calcolano la rotazione e la traslazione che rendono minime le distanze tra i due insieme di punti;
- 3) si aggiornano le posizioni dei punti appartenenti all'insieme Q;
- 4) si ripetono le operazioni dallo step 1 allo step 3 fino ad ottenere la convergenza.

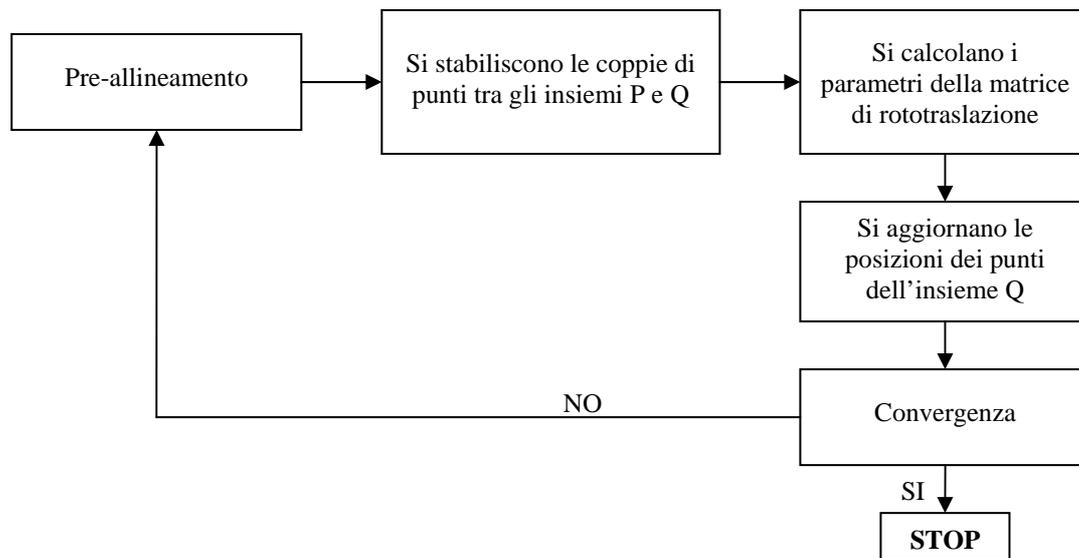


Figura 1 - tecnica di allineamento per sovrapposizione: diagramma di flusso

La conoscenza di punti in numero sovrabbondante in entrambi i sistemi, consente la stima dei parametri necessari con un criterio ai minimi quadrati. Se $a=[a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ è il vettore delle coordinate di un punto nel sistema A e $b=[b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ il suo corrispondente nel sistema B, i due insiemi possono essere relazionati sulla scorta della seguente trasformazione di similitudine:

$$b = g + (1+m)T^T \quad [1]$$

in cui T è una matrice di rotazione ortogonale 3x3, (1+m) è un fattore di scala, $g=[g_1 \ g_2 \ g_3]^T$ è una traslazione. Operando su un sistema sovrabbondante, la soluzione che si ottiene ai minimi quadrati è quella che minimizza la somma pesata dei quadrati dei residui. In altri termini, se Σ^{-1} è la matrice dei pesi opzionale, contenente gli eventuali pesi globali assegnati ai punti di legame e corrispondente all'inverso della matrice di covarianza, il criterio di stima ai minimi quadrati impone che sia soddisfatta la condizione:

$$v^T \Sigma^{-1} v = [\min] \quad [2]$$

essendo v il vettore degli scarti. Tale soluzione è effettivamente rigorosa quando i parametri della rotazione sono infinitesimali, mentre, in caso contrario, è necessario attribuire agli stessi parametri un valore iniziale approssimato.

Il metodo dell'allineamento analitico mediante punti di legame con l'applicazione dell'Analisi Procustiana, consente invece la determinazione dei parametri della trasformazione di similitudine senza valori iniziali approssimati, sulla base delle coordinate di alcuni punti comuni (di legame) nei rispettivi sistemi di riferimento. L'Analisi Procustiana è una tecnica statistica ormai largamente diffusa nell'ambito dell'analisi delle forme (Goodall, 1991; Dryden e Mardia, 1998), applicata nel corso degli ultimi anni nel campo geodetico e topografico (Crosilla, 1999) ed all'allineamento delle scansioni laser (Beinat e Crosilla, 2001). Le tecniche procustiane ortogonali operano su coppie di configurazioni matriciali indicate come "origine" e "destinazione", consentendo di determinare direttamente i parametri di trasformazione che meglio adattano una configurazione sull'altra secondo il principio dei minimi quadrati ed il vincolo di ortogonalità. I modelli procustiani ortogonali applicabili al problema della registrazione di scansioni laser possono essere distinti in:

- modello OPA (Orthogonal Procrustes Analysis): consente di ricavare i parametri di rototraslazione tra due datum;
- modello WOPA (Weighted Orthogonal Procrustes Analysis): permette di definire la rotazione e la traslazione tra coppie di punti singolarmente pesati;
- modello GPA (Generalized Procrustes Analysis): consente di trattare simultaneamente un numero virtualmente illimitato di configurazioni matriciali.

Diversamente dai metodi di trasformazione classici, la procedura procustiana permette il calcolo diretto e non approssimato dei parametri di trasformazione. I parametri da determinare per poter riferire ad un sistema A i punti acquisiti con una scansione B sono:

- ❖ la rotazione ortogonale T;
- ❖ la traslazione t .

Nella presente esperienza è stato utilizzato il modello OPA, in cui la trasformazione per rototraslazione tra due insiemi di punti A e B è espressa dalla relazione:

$$B = t + AT \quad [3]$$

in cui t è un vettore traslazione, mentre T è una matrice di rotazione, genericamente indicata con la seguente notazione:

$$T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad [4]$$

che, nel caso piano, assume la seguente forma:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [4']$$

Denominate a_x , a_y e a_z le componenti del vettore traslazione t ed indicando con

$$A = \begin{bmatrix} x_1^A & y_1^A & z_1^A \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p^A & y_p^A & z_p^A \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^B & y_1^B & z_1^B \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p^B & y_p^B & z_p^B \end{bmatrix}$$

i database origine e destinazione, la [3] assume la forma estesa:

$$\begin{bmatrix} x_1^B & y_1^B & z_1^B \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p^B & y_p^B & z_p^B \end{bmatrix} = [a_x \quad a_y \quad a_z] + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^A & y_1^A & z_1^A \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p^A & y_p^A & z_p^A \end{bmatrix} \quad [5]$$

e, nel caso piano:

$$\begin{bmatrix} x_1^B & y_1^B \\ \dots & \dots \\ x_p^B & y_p^B \end{bmatrix} = [a_x \quad a_y] + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^A & y_1^A \\ \dots & \dots \\ x_p^A & y_p^A \end{bmatrix} \quad [6]$$

Se i database A e B fossero stati acquisiti senza alcuna incertezza di posizionamento, la differenza tra il primo ed il secondo membro della [3] sarebbe nulla, mentre in realtà, a causa degli errori accidentali in fase di rilievo, si hanno degli scarti e_i , che formano la matrice dei residui:

$$E = \begin{bmatrix} e_1^x & e_1^y \\ \dots & \dots \\ e_p^x & e_p^y \end{bmatrix} = [a_x \quad a_y] + \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^A & y_1^A \\ \dots & \dots \\ x_p^A & y_p^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^B & y_1^B \\ \dots & \dots \\ x_p^B & y_p^B \end{bmatrix} \quad [7]$$

I parametri incogniti della trasformazione a_x , a_y e θ) vengono determinati imponendo la condizione di minimo della norma euclidea della matrice E dei residui:

$$\|E\|_E^2 = \|(t + AT) - B\|_E^2 = \min \quad [8]$$

La condizione [8] equivale alla seguente:

$$\text{tr}(E^T E) = \min \quad [9]$$

2. L'esperienza di rilievo e la registrazione delle scansioni

L'esperienza di rilievo con laser scanner 3D riguarda la Piazza San Giovanni di Siracusa. Il rilievo, eseguito con un laser scanner a tempo di volo LEICA HDS 3000, è stato articolato in venti scansioni ed integrato con un inquadramento topografico dei target realizzato utilizzando una stazione totale PULSE LASER STATION NPL-350 della NIKON. Nella tabella in fig. 2 sono riportate le coordinate dei target nelle venti scansioni.

Scan.	Targ.	X (m)	Y (m)	Scan.	Targ.	X (m)	Y (m)	Scan.	Targ.	X (m)	Y (m)
1	1	4,5524	-1,8166	11	11	4,2884	2,1605	17	26	8,4890	-23,0232
	2	4,6276	-6,2051		12	1,3484	-12,3106		27	3,9877	-20,2349
	3	-3,4064	-15,4082		13	-4,0800	-21,0379		28	3,8916	-11,6529
2	1	-11,2759	4,2138	12	10	-15,5068	-5,5172	18	26	20,0759	-9,3147
	3	4,4729	4,1084		12	-3,5168	-0,2982		27	24,0333	-12,8301
	4	-7,5919	6,3782		13	-7,8345	-9,6216		28	22,6662	-21,3014
7	4	5,7735	13,3769	13	10	-16,9809	3,7292	19	29	1,4440	-1,8641
	9	4,2205	-2,0533		12	-4,5565	-0,3650		30	-3,6282	2,2660
8	10	-6,6223	6,7247		13	-13,9921	-4,4393		31	-4,1271	5,4986
	11	-8,9174	30,5163	14	10	-6,2088	-11,1090	20	29	-5,3008	-9,9513
	12	-0,5698	18,3247		11	-20,3769	8,1332		30	-3,3705	-3,6951
	13	1,9218	8,3527		12	-6,9592	1,9491		31	-0,5590	-2,0238
			13		0,2928	-5,3337					
9	10	-5,2488	-17,9025	15	25	5,1013	-4,0790				
	11	-27,2278	-27,2902		26	-12,3499	-12,9533				
	12	-18,1355	-15,6448		27	-15,4530	-17,2392				
	13	-9,3861	-10,2524								
10	10	10,7053	-2,7032	16	25	-6,5764	9,6432				
	11	-12,5614	-8,1383		26	-2,9727	-9,5985				
	12	-1,5937	1,7511		27	0,2674	-13,7833				
	13	7,9561	5,5500		28	-2,6414	-21,8580				

Figura 2: coordinate dei target rilevate con il laser scanner

Applicando la procedura OPA dell'Analisi Procrustiana, è stato effettuato l'allineamento nel piano delle scansioni 8, 9, 10 e 14, scegliendo di calcolare i valori dei parametri di rototraslazione non soltanto a partire dall'insieme dei target disponibili, ma anche per un numero inferiore, in modo da controllare l'influenza della numerosità dei punti di legame sulla precisione dell'allineamento.

Assunto come riferimento assoluto il sistema adottato nella scansione n° 8, rispetto ad esso è stata eseguita

la georeferenziazione delle scansioni n° 9, n° 10 e n° 14, ottenendo i parametri di rototraslazione riepilogati nella tabella in fig. 3. I risultati sono stati elaborati e sottoposti a controlli incrociati in modo da poter ricavare delle indicazioni in merito a due aspetti fondamentali:

- a) effetti della ridondanza dei target sul calcolo dei parametri di trasformazione;
- b) ordine di grandezza delle incertezze introdotte dalla procedura di allineamento.

Scansione		a_x (m)	Δa_x (mm)	Δa_x (%)	a_y (m)	Δa_y (mm)	Δa_y (%)	θ (°)	$\Delta\theta$ (°)	$\Delta\theta$ (%)
9	n=2	-0.842940	0,106	0,0126	-9,55501	0,310	0,0032	107°,618090	0,0000	0,0000
	n=3	-0.842884	0,162	0,0192	-9,55513	0,190	0,0020	107°,618090	0,0000	0,0000
	n=4	-0.843046	0,000	0,0000	-9,55532	0,000	0,0000	107°,618090	0,0000	0,0000
10	n=2	16,494400	2,100	0,0127	4,75520	0,730	0,0153	97°,638311	0,005729	0,0059
	n=3	16,493600	1,300	0,0079	4,75456	1,370	0,0288	97°,640030	0,004010	0,0041
	n=4	16,492300	0,000	0,0000	4,75593	0,000	0,0000	97°,644040	0,000000	0,0000
14	n=2	2,927000	0,390	0,0133	-13,4883	1,300	0,0096	30°,854236	0,002579	0,0084
	n=3	2,926930	0,320	0,0109	-13,4893	0,300	0,0020	30°,852631	0,000974	0,0032
	n=4	2,926610	0,000	0,0000	-13,4896	0,000	0,0000	30°,851657	0,000000	0,0000

Figura 3: parametri di rototraslazione

Per quanto riguarda il primo dei due punti su indicati, è intuitivo pensare che la progressiva crescente ridondanza dei punti di legame comporti la convergenza dei valori dei parametri di rototraslazione verso la soluzione più probabile e che quindi sia opportuno, in sede di rilievo, aumentare convenientemente il numero dei target. È allora lecito attendersi che, confrontando tra loro i valori dei parametri di trasformazioni ottenuti per un medesimo allineamento utilizzando un numero crescente di target, si possa desumere un trend di convergenza verso la soluzione più probabile. I risultati di tale controllo, riepilogati nella tabella in fig. 4 non sembrano però confermare tale ipotesi.

Scansione		a_x (m)	Δa_x (mm)	Δa_x (%)	a_y (m)	Δa_y (mm)	Δa_y (%)	θ (°)	$\Delta\theta$ (°)	$\Delta\theta$ (%)
9	n=2	-0.842940	0,106	0,0126	-9,55501	0,310	0,0032	107°,618090	0,0000	0,0000
	n=3	-0.842884	0,162	0,0192	-9,55513	0,190	0,0020	107°,618090	0,0000	0,0000
	n=4	-0.843046	0,000	0,0000	-9,55532	0,000	0,0000	107°,618090	0,0000	0,0000
10	n=2	16,494400	2,100	0,0127	4,75520	0,730	0,0153	97°,638311	0,005729	0,0059
	n=3	16,493600	1,300	0,0079	4,75456	1,370	0,0288	97°,640030	0,004010	0,0041
	n=4	16,492300	0,000	0,0000	4,75593	0,000	0,0000	97°,644040	0,000000	0,0000
14	n=2	2,927000	0,390	0,0133	-13,4883	1,300	0,0096	30°,854236	0,002579	0,0084
	n=3	2,926930	0,320	0,0109	-13,4893	0,300	0,0020	30°,852631	0,000974	0,0032
	n=4	2,926610	0,000	0,0000	-13,4896	0,000	0,0000	30°,851657	0,000000	0,0000

Figura 4: parametri di trasformazione

Se si considera, ad esempio, la scansione 9, si nota che i valori dei parametri a_x ed a_y calcolati per n=2 ed n=3 differiscono dai valori calcolati per n=4 di quantità dell'ordine di 1×10^{-4} m, mentre la precisione del posizionamento con laser scanner è di $\pm 6 \times 10^{-3}$ m. Addirittura, il valore del parametro θ non varia, se non oltre la sesta cifra decimale, passando dall'allineamento con n=2 ad n=3 e ad n=4. Una tendenza simile, anche se in termini meno marcati, viene registrata anche per le scansioni 10 e 14, come pure evidenziato dal confronto degli scarti percentuali.

Una prima interpretazione di questi risultati, pur con tutta la cautela imposta dalla piccola entità del campione a disposizione, sembrerebbe quindi indicare una convergenza pressoché immediata al valore probabile dei parametri di trasformazione, per cui non avrebbe rilevante importanza l'impiego di numerosi target per risolvere il problema dell'allineamento. Lo scenario cambia però repentinamente se si esegue una verifica dei risultati, calcolando le coordinate dei target nel sistema 8 a partire dai valori rilevati nelle scansioni 9, 10 e 14 mediante i parametri di rototraslazione precedentemente determinati. Nella tabella in fig. 5, oltre a riportare le coordinate dei target così calcolate, sono stati evidenziati gli scarti, sia in termini assoluti che in percentuale, rispetto ai valori rilevati nella scansione 8.

Scansione origine	Target	X (m)	ΔX (mm)	ΔX (%)	Y (m)	ΔY (mm)	ΔY (%)
9	10	-6,6222	0,13	0,0020	6,7256	0,90	0,0134
	11	-8,9171	0,27	0,0030	30,5151	1,24	0,0041
	12	-0,5699	0,13	0,0236	18,3245	0,19	0,0010
	13	1,9213	0,45	0,0236	8,3534	0,68	0,0081
10	10	-6,6230	0,74	0,0112	6,7278	3,07	0,0456
	11	-8,9150	2,43	0,0273	30,5107	5,63	0,0184
	12	-0,5723	2,54	0,4463	18,3250	0,27	0,0015
	13	1,9225	0,71	0,0368	8,3547	2,02	0,0241
14	10	-6,6219	0,38	0,0058	6,7285	3,82	0,0568
	11	-8,9175	0,09	0,0011	30,5136	2,75	0,0090
	12	-0,5697	0,07	0,0127	18,3237	1,00	0,0055
	13	1,9214	0,44	0,0226	8,3525	0,22	0,0026

Figura 5: verifica delle coordinate dei target

Si nota che, mediamente, gli scarti raggiungono in alcuni casi anche l'ordine millimetrico e sono quindi comparabili con l'incertezza di posizionamento propria del laser scanner. Si consideri che il controllo è stato effettuato sui punti di legame, per i quali la procedura di allineamento ottimizza la congruenza tra i due sistemi di riferimento origine e destinazione, per cui appare lecito ipotizzare che per gli altri punti della nuvola gli scarti possano assumere valori ancora più significativi.

Contrariamente a quanto inizialmente ipotizzato, si può allora desumere che la ridondanza dei target intervenga sensibilmente nel corretto calcolo dei più probabili valori dei parametri di trasformazione, ma che la convergenza sia molto lenta. Quest'ultima circostanza non è stata evidenziata nel campione a disposizione probabilmente per la scarsa numerosità dei target.

3. Conclusioni

Le considerazioni precedentemente espresse non possono certo essere considerate conclusive, ma, al contrario, necessitano di un adeguato approfondimento sulla scorta di un campione di misure più ampio. Si ritiene infatti che un adeguato progetto dei target, opportunamente dislocati in relazione all'oggetto da rilevare, possa ridurre il numero dei punti di legame necessari per ottenere una significativa convergenza dei parametri di trasformazione ai valori più probabili. È inoltre necessario porre l'accento sul problema dell'incertezza di posizionamento dei target nel rilievo topografico di inquadramento. La determinazione delle coordinate di anche uno solo dei punti presegnalizzati con un'approssimazione diversa dagli standard previsti in fase di progetto (eventualità tutt'altro da escludere nella comune pratica topografica) si ripercuoterebbe infatti, con effetti non quantificabili, sull'intero sistema di risoluzione e determinazione dei parametri di rototraslazione.

Quest'ultima riflessione ha indotto i sottoscritti a realizzare una procedura di calcolo, che consente il controllo statistico dei parametri di rototraslazione. Di tale procedura si riferisce in un'altra nota.

Ringraziamenti

Si ringraziano l'Archilab (www.archilab.info) e, in particolare, i direttori tecnici Paolo Zappulla e Massimiliano Failla per la cortese e preziosa collaborazione.

Bibliografia:

- Crosilla F., Beinat A., 2004: "Applicazioni dell'analisi procustiana alla trasformazione di datum in ambiente GIS", Atti 8^a Conferenza ASITA
- Beinat, A. Crosilla F., 2002: "Tecniche avanzate di allineamento di scansioni laser" in "La tecnica del laser scanning: teoria ed applicazioni" – ed. CISM
- Rinaudo F., 2002: "La tecnica laser scanning: applicazioni architettoniche e urbanistiche" in "La tecnica del laser scanning: teoria ed applicazioni" – ed. CISM
- Crosilla F., 1999: "Procrustes Analysis and Geodetic Sciences" in "Quo vadis geodesia...?" Department of Geodesy and GeoInformatics University of Stuttgart
- Goodall C., 1991: "Procrustes methods in the statistical analysis of shape", Journal Royal Stat. Soc., B53, 2, 285-339