

La misura della qualità in geomatica

Susanna Alberti ^(a), Luigi Mussio ^(b), Daniela Poli ^(c), Alice Pozzoli ^(d)

^(a) Politecnico di Milano, DICA, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, 02 23996604, susanna.alberti@polimi.it

^(b) Politecnico di Milano, DICA, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, 02 23996501, luigi.mussio@polimi.it

^(c) Politecnico di Milano, DICA, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, 02 23996501, danipolix@gmail.com

^(d) Politecnico di Milano, DICA, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, 02 23996501, pozzoli.alice@gmail.com

Riassunto – La città di Matera, nel 2019, Capitale Europea della Cultura, confrontata fra la vergogna, ormai passata, dei suoi Sassi ed il suo prodigioso risanamento odierno, fa da apripista ad un discorso, qui anche quantitativo, sulla misura della qualità in Geomatica ed in Geomatica Applicata. In questo contesto, punto d'avvio è come scegliere tra modelli ottimali (cui far seguire un innovativo test di buon adattamento, potente e di facile applicazione), l'indispensabile strumento di passaggio tratta la trasformazione di variabili causali (con il teorema della/e media/e e la legge di propagazione della varianza e varianza-covarianza) ed il punto d'arrivo, offerto dall'analisi multivariata, presenta la co-regressione (come il suo più semplice modello). Brevi considerazioni sulla probabilità soggettiva ed il neo-criticismo concludono questo lavoro.

Abstract – The Italian City of Matera, awarded European Capital of Culture 2019, leads to a quantitative discussion on the measurement of quality in Geomatics and Applied Geomatics. The starting point is how to choose between optimal models (followed by an innovative goodness of fit test, powerful and easy to be applied), then a transformation of random variables is dealt with (using the mean value theorem and the variance-covariance propagation law). The end point is the multivariate analysis that introduces the co-regression (as the most basic model). This work ends with brief remarks on subjective probability and neocriticism.

Generalità

Misurare la qualità (e talvolta anche solo assegnarne una) è uno strumento fondamentale, in molte attività / operazioni della vita civile associata e, nello specifico, in Geomatica e Geomatica Applicata. Infatti solo così beni, prodotti, servizi e valori sono ben valutati, in termini di fedeltà ed affidabilità (e, se la fedeltà è espressa in forma numerica, diventa accuratezza, rispetto ai valori attesi, e precisione, nei confronti della dispersione delle realizzazioni concrete). In questo modo, tutto questo permette di formulare giudizi tanto sui modelli adottati, quanto sugli esperimenti effettuati (ovvero sui casi concreti della comune quotidianità, come pure su determinate prove sperimentali), muovendosi dalla statistica descrittiva, fino all'analisi multivariata (ed oltre), passando sempre per l'inferenza statistica.

Allora la qualità delle cose generiche, così come dei geodati, delle immagini e di altre basi di dati d'interesse che popolano il WEB ed il mondo dei GIS è messa in evidenza, nei metadati di corredo. Infatti anche un semplice oggetto, come pure una misura elementare, è nullo/a, senza un'idea, almeno elementare, sulla sua rispondenza ad una certa richiesta. Pertanto tanto più ricca è la collezione dei metadati, in termini di fedeltà (accuratezza e precisione), affidabilità, condizionamento e robustezza (per quanto proprio questa proprietà è in contrasto con una maggiore precisione ed una maggiore precisione è sempre a scapito della robustezza), quanto più elevata risulta la qualità delle informazioni raccolte (nello specifico, in Geomatica e Geomatica Applicata), nonché di tutto quanto sia oggetto di produzione, manipolazione ed elaborazione.

Restringendo l'attenzione al campo della Geomatica e Geomatica Applicata, le informazioni (che popolano il WEB ed il mondo dei GIS) vertono sui geodati (con misure geodetiche, in rete od isolate, di serie temporali e non), sulla galassia delle immagini (comunque acquisite, nei loro vari spettri di frequenza, ivi comprese le immagini complesse che misurano distanze e non tangenti di direzione) e su altre basi di dati d'interesse, quantitative e/o qualitative (provenienti da altre sorgenti non geodetiche / geomatiche, da archivi storici, da campionamenti statistici, ecc.). Ovviamente una società povera è spesso costretta a fare a meno di tutto ciò, ma è innegabile che fare a meno di tutto questo è anche una condizione per dare avvio al cammino verso una società più povera, dove purtroppo qualcosa di peggio può sempre ancora accadere.

Un esempio interessante ¹

Un esempio di riscatto riuscito, nonostante forse ancora innumerevoli contraddizioni, più o meno, nascoste (ma è altresì innegabile che spesso innumerevoli contraddizioni, più o meno, nascoste esistano dappertutto o quasi) è dato dai Sassi della città di Matera, definiti dall'UNESCO, nel 1993, patrimonio dell'umanità. A riguardo, i Sassi di Matera, definiti vergogna d'Italia, da importanti politici italiani, alla fine della seconda guerra mondiale, sono descritti, nella loro cruda realtà passata, nel romanzo di Carlo Levi, *Cristo si è fermato a Eboli* ². Invece ad oltre sessanta/settanta anni di distanza, la differenza è eloquente e la città di Matera, come larga parte della regione Basilicata, è una delle aree meno problematiche del Mezzogiorno d'Italia. Ancora a riguardo, nessuna predica, ma un invito a riflettere.

... Arrivai ad una strada che da un solo lato era fiancheggiata da vecchie case e dall'altro costeggiava un precipizio. In quel precipizio è Matera... Di faccia c'era un monte pelato e brullo, di un brutto color grigiastro, senza segno di coltivazioni né un solo albero: soltanto terra e pietre battute dal sole. In fondo... un torrentaccio, la Gravina, con poca acqua sporca ed impaludata tra i sassi del greto... La forma di quel burrone era strana: come quella di due mezzi imbuto affiancati, separati da un piccolo sperone e riuniti in basso da un apice comune, dove si vedeva, di lassù, una chiesa bianca: S.Maria de Idris, che pareva ficcata nella terra. Questi coni rovesciati, questi imbuto si chiamano Sassi, Sasso Caveoso e Sasso Barisano. Hanno la forma con cui a scuola immaginavo l'inferno di Dante... La stradetta strettissima passava sui tetti delle case, se quelle così si possono chiamare. Sono grotte scavate nella parete di argilla indurita del burrone... Le strade sono insieme pavimenti per chi esce dalle abitazioni di sopra e tetti per quelli di sotto... Le porte erano aperte per il caldo, Io guardavo passando: e vedevo l'interno delle grottesche non prendono altra luce ed aria se non dalla porta. Alcune non hanno neppure quella: si entra dall'alto, attraverso botole e scalette.

... Dentro quei buchi neri dalle pareti di terra vedevo i letti, le misere suppellettili, i cenci stesi, Sul pavimento erano sdraiati i cani, le pecore, le capre, i maiali. Ogni famiglia ha in genere una sola di quelle grotte per abitazione e ci dormono tutti insieme, uomini, donne, bambini, bestie... Di bambini ce n'era un'infinità... nudi o coperti di stracci... Ho visto dei bambini seduti sull'uscio delle case, nella sporcizia, al sole che scottava, con gli occhi semichiusi e le palpebre rosse e gonfie. Era il tracoma. Sapevo che ce n'era quaggiù: ma vederlo così nel sudiciume e nella miseria è un'altra cosa... E le mosche si posavano sugli occhi e quelli pareva che non le sentissero... coi visini grinzosi come dei vecchi e scheletrici per la fame: i capelli pieni di pidocchi e di croste... Le donne magre con dei lattanti denutriti e sporchi attaccati a dei seni vizzi... sembrava di essere in mezzo ad una città colpita dalla peste (Carlo Levi, *Cristo si è fermato a Eboli*).

Un commento rileva come non esista, quasi mai, un passato epico da rimpiangere e cui tendere, ma solo, quasi sempre, un passato fatto soprattutto di stenti, miseria e paura dal quale, con grandissime sofferenze e sforzi enormi, si è riusciti talvolta ad emergere. Non una gloriosa cantica su un

¹ Ibridare la Geomatica è saper affiancare discorsi culturali ad esempi concreti, per poi passare a nuove formulazioni anche con varie notazioni matematiche.

² Il romanzo: *Cristo si è fermato a Eboli*, di Carlo Levi, è edito da Einaudi (Torino).

presente eccellente, né una cieca fiducia in un futuro, automaticamente migliore, ma la coscienza serena di poter/dover compiere piccoli passi, tutti insieme, per superare le tantissime contraddizioni, passate e presenti, che pure affliggono la vita quotidiana, dagli ambiti ristrettissimi della vita personale, fino a quelli estesi ad intere società. Certamente non è facile ed il rischio di fallire è alto, ma occorre accettare la sfida, pena accettare il disfacimento del mondo naturale, la dissoluzione della società umana e la perdita della qualità della vita personale.



Figura 1 - Una vecchia immagine dei Sassi di Matera

(La storia del Mezzogiorno d'Italia) si è svolta nel suo nero silenzio, come la terra, in un susseguirsi di stagioni uguali e di uguali sventure (Carlo Levi, parafrasando Virgilio³: *humilemque vidimus Italiam*). Il 1860 fu rivoluzione politica della borghesia, il brigantaggio fu reazione sociale della plebe (Giustino Fortunato).



Figura 2 - Una immagine attuale dei Sassi di Matera

La seconda immagine proposta è presa volutamente notturna, per dimostrare la nuova vita, completamente diversa, offerta ai Sassi di Matera. Meno di mille persone (o forse solo cinquecento) vivono in quei quartieri, ma i Sassi brulicano, giorno e notte, di attività commerciali e dei servizi connessi che ricordano un'antica, ormai scomparsa (e da non rimpiangere, come già detto in precedenza), civiltà contadina, con i suoi usi e costumi, e le sue antiche tradizioni. Certamente sarebbe un delitto costringere qualcuno a vivere, come in uno zoo, nelle condizioni d'allora, mentre

³ Virgilio, nelle Bucoliche e nelle Georgiche, come Orazio, nelle Satire, Odi ed Epodi, esprime nell'epicureismo tutta la libertà di pensiero di cui è capace il mondo antico. Più didascalico, ma ugualmente libero, è invece lo stoicismo di Seneca delle Lettere a Lucilio.

è cosa benvenuta conservare, risanando opportunamente, quello che la storia conduce fino ad oggi (ancora senza giudizi di valore: in altre parti del mondo, la preistoria dura fino alla fine dell'800, qui invece quasi 3.000 anni di storia sono una testimonianza notevole).

Un secondo commento contrappone Matera a larga parte del Mezzogiorno d'Italia, rilevando come non uno stato assistenziale cencioso garantisca il welfare, ma la coscienza sociale e l'impegno civile costruiscano un mondo ed una società, basati sulla libertà nella democrazia e sulla giustizia come equità. Quanto detto non vuole essere un monito, ma un augurio, ben sapendo che parti delle contraddizioni del Mezzogiorno d'Italia, come delle province meridionali iberiche, dei Balcani e di parte della Grecia, hanno origine nelle regioni del centro/nord dell'Europa e, in particolare, nell'Italia centro/settentrionale, per quanto riguarda la realtà italiana (ma non solo, ben ricordando crimini di guerra italiani, commessi in Spagna, in Grecia e nei Balcani). Poi lo stesso discorso si può estendere al Nord Africa ed al Medio Oriente, ecc.



Figura 3 - Monumento a Michele Saverio Granata (Rionero in Vulture, 1748 – Napoli, 1799), frate carmelitano scalzo, professore di matematica all'Accademia Militare di Napoli, martire della Repubblica Partenopea, sito a Rionero in Vulture (PZ), a riprova che una persona qualunque e, in parte, forse contraddittoria (dopotutto è un religioso che insegna anche ai militari), può diventare un esempio preclare, quando sappia assumersi le responsabilità che un preciso momento storico impone (con lo stesso titolo di merito, molte altre persone possono essere citate)

Una società è migliore, quanto più si riesce a conciliare gli individui ed i gruppi minoritari, compresi i rapporti con la maggioranza (liberamente ripreso da Raymond Claude Ferdinand Aron).

L'ultimo discorso sui doveri del nord (ed ogni parte ha un nord ed un sud, anche se a volte si capovolgono) è particolarmente importante, perché va geograficamente e storicamente al centro del problema. Infatti è più facile dappertutto stare bene al centro, dove tutto converge, che in qualche periferia, dove tutto si disperde. A conferma di quanto affermato, basta osservare l'immagine satellitare ⁴ dell'Europa di notte, dove una cintura di città, come l'antica Lotaringia, dal Mare del Nord, attraverso le Fiandre, la Renania e la Svizzera, giunge alla valle del Rodano e, valicati alcuni passi alpini, alla pianura padana. Una considerazione arguta rileva come forse la conservazione

⁴ Al di fuori di questa cintura, si vedono solo due regioni (l'Inghilterra, da Londra all'Inghilterra centrale, e l'Île de France, con Parigi), alcune coste (portoghese, valenziana e catalana in Spagna, la Costa azzurra in Francia, il litorale marchigiano in Italia), più tante città isolate (in particolare, le città scozzesi di Glasgow ed Edimburgo; nell'Europa centrale: Berlino, Lipsia, Monaco di Baviera e Vienna; nella penisola iberica: Madrid; in Italia: Firenze, Roma e Napoli; nell'Europa orientale: Varsavia, Cracovia, Praga, Budapest, Istanbul ed Atene; le città scandinave di Oslo e Stoccolma, e le città russe di San Pietroburgo e Mosca).

della Lotaringia avrebbe evitato tante guerre, per modificare confini, affatto sacri e comunque tanto sporchi. Del resto, la Svizzera, dalla pace di Westfalia, ed il Lussemburgo, dal congresso di Vienna, non hanno più fatto guerre (pur avendone subite o subito la minaccia).



Figura 4 - L'Europa di notte

Quando sei alle prese con qualcosa di tecnicamente attraente, vai avanti e lo realizzi. Ti interroghi su ciò che hai fatto solo dopo che hai ottenuto il tuo obiettivo tecnico (Julius Robert Oppenheimer, 1954)⁵.

L'ultimo discorso sui doveri del nord è autorevolmente commentato da poche immagini che mostrano una favela del terzo mondo (dove casupole e baracche, ammassate l'una all'altra, ospitano un numero enorme di persone, senza alcun confort e sicurezza), bambini al lavoro in una discarica (dove alla piaga indecente del lavoro minorile si somma un lavoro certamente malsano, miserrimo ed insicuro) ed uno sbarco di migranti (perché da guerre e/o povertà, con ogni mezzo e nonostante ogni vergognoso muro frapposto, non appena possibile, si fugge alla ricerca, spesso vana, di un mondo comunque migliore).

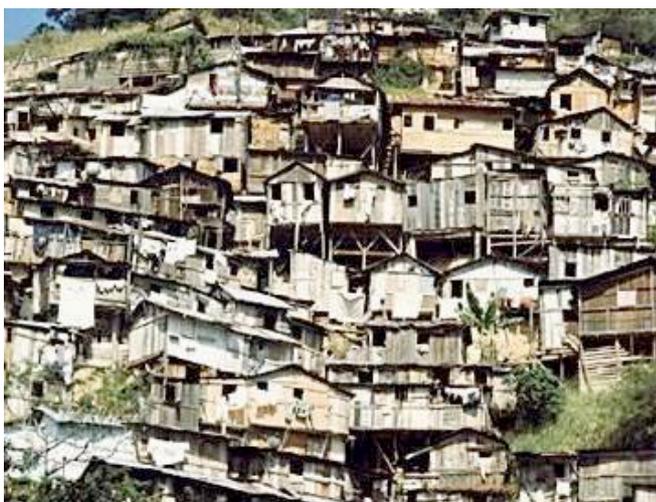


Figura 5 - Una favela del terzo mondo

⁵ Problematica è la data: dieci anni dopo il 1945, con le due bombe atomiche in Giappone. Spesso poi questo avviene anche in ambito politico e/o socioeconomico, ad esempio, con le dittature e/o le shock/terapie: tutte cose che dovrebbero imporre altre serie riflessioni.



Figura 6 - Bambini al lavoro in una discarica



Figura 7 - Sbarco di migranti

Scegliere tra modelli ottimali ed un test di buon adattamento

La grazia odia l'intollerabile necessità (Empedocle).
 Il tempo è un fanciullo che gioca a dadi col mondo (Eraclito).

Andare (e tornare) dalla teoria alla sperimentazione richiede anche di far uso di criteri di validazione, tanto sulla qualità dei modelli (ad esempio, sul numero dei parametri di una regressione lineare multipla, oppure di una regressione non lineare multipla, comunque ricondotta a forma lineare), quanto sulla rispondenza dei risultati attesi da un certo modello (ad esempio, sulla verifica della normalità di dati campionari indipendenti, con una data media ed una data varianza).

In questo modo, dato il risultato della regressione $\hat{\sigma}_0^2(n')$, essendo $n' < n$ il numero dei suoi parametri, con m numero dei dati e n numero dei parametri totali, due criteri possono essere adottati, minimizzandoli al fine di massimizzare l'indice di determinazione R^2 della regressione. Numericamente è necessario calcolare tutte le regressioni possibili (selezionando i parametri) e scegliere quella che minimizza uno dei due criteri informativi, ovvero l'indice Akaike (AIC), oppure quello di Schwarz – Bayes (BIC):

$$AIC(n') = \ln \hat{\sigma}_0^2(n') + \frac{2n'}{n} \quad [1]$$

$$BIC(n') = \ln \hat{\sigma}_0^2(n') + \frac{n' \ln n}{n} \quad [2]$$

Invece dato un campione bernoulliano x , con media \bar{x} e varianza $\hat{\sigma}^2$ opportunamente stimate, il suo adattamento alla distribuzione normale può essere verificato con il test di Shapiro – Wilk che, calcolato il quadrato del coefficiente di correlazione tra gli scarti dei dati dalla loro media campionaria e le loro posizioni teoriche, rispetto alla distribuzione normale, conferma l'ipotesi fondamentale o nulla, se il valore atteso è prossimo ad uno e non cade nella zona critica, e l'ipotesi alternativa, in caso contrario.

Test di Shapiro – Wilk

ipotesi fondamentale: H_0 : *adattamento alla Normale*

ipotesi alternativa: H_1 : *nessun adattamento*

valore atteso:
$$\hat{w}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) N^{(1)} \frac{i - 0.5}{m}}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^m N^{(1)} \frac{i - 0.5}{m}} \quad [3]$$

valore teorico: $w^2(\)$

esecuzione del test: $\hat{w}^2 \approx w^2(\)$ vale: H_0

$\hat{w}^2 > w^2(\)$ vale: H_1

Elementare è la lettura delle formule degli indici di Akaike e Schwarz – Bayes (dove l'unico inconveniente è la necessità di calcolare tutte le regressioni possibili, in mancanza di una strategia di ricerca), ma non difficile è la lettura per il calcolo del valore atteso di Shapiro – Wilk. Infatti sottrarre un mezzo al numero d'ordine dei dati vuol dire supporli distribuiti dall'unità inferiore ad essi stessi, cosicché il primo abbia origine nello zero e l'ultimo abbia termine in n (cioè ad uno, dividendo ogni differenza per n), e scegliere proprio il suo punto centrale, come rappresentante della classe.

Dopodiché la funzione inversa della normale richiede di leggere ascisse standard, date probabilità normali cumulate (comprese tra zero ed uno). Inoltre per l'esecuzione del relativo test (in mancanza di tabelle già adatte all'esecuzione dello stesso, talvolta di difficile reperimento, seppure esistenti), trattandosi di un coefficiente di correlazione il cui valore di riferimento è uno, occorre ricorrere alla distribuzione esatta di David, oppure al test approssimato della cosiddetta trasformata Z di Fisher, per effettuare questo test con la distribuzione normale standard.

Un ulteriore passo, per verificare la rispondenza dei risultati attesi da un certo modello, è compiuto dal test di Breusch – Pagan che prova l'omogeneità tra le dispersioni di diverse grandezze, contro un loro diverso andamento (caratterizzato da varianze diverse, per ciascuna grandezza, oppure per loro gruppi). Nel caso di più grandezze in regressione, a partire dagli scarti residui della regressione stessa, occorre poi procedere al calcolo di una seconda regressione sui quadrati di questi scarti residui, in funzione di quelle stesse variabili indipendenti, entrate nella regressione.

L'indice di determinazione di questa seconda regressione (ovvero il quadrato del suo coefficiente di correlazione multipla), moltiplicato per il numero dei dati della regressione stessa, segue la distribuzione chi quadrato, con gradi di libertà pari al numero delle variabili indipendenti, entrate in regressione. Di conseguenza, fissato un opportuno livello di significatività del test, se il valore atteso è inferiore al valore teorico, si accetta l'ipotesi fondamentale (o nulla) di omogeneità tra le dispersioni di queste variabili indipendenti, entrate in regressione, mentre vale l'ipotesi alternativa, in caso contrario.

Equazioni della regressione:
$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x_{ij} + v_i \quad [4]$$

Equazioni della regressione sui quadrati dei residui:
$$v_i^2 = w_i = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} + u_i \quad [5]$$

Indice di determinazione della seconda regressione:
$$R^2 = SSE/SST = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N u_i^2}{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2} \quad [6]$$

<u>Test di Bresch – Pagan</u>	ipotesi fondamentale:	$H_0: \sigma_i^2 = cost \quad i$	
	ipotesi alternativa:	$H_1: \sigma_i^2 \uparrow cost \quad i$	
	valore atteso:	$\hat{\sigma}_n^2 = NR^2$	
	valore teorico:	$\hat{\sigma}_n^2(\quad)$	
	esecuzione del test:	$\hat{\sigma}_n^2 < \hat{\sigma}_n^2(\quad)$	vale: H_0
		$\hat{\sigma}_n^2 > \hat{\sigma}_n^2(\quad)$	vale: H_1

Il soddisfacimento del test di Breusch – Pagan permette l'esecuzione del test di Fisher, sull'uguaglianza di medie campionarie e, nel caso di una regressione, sull'uguaglianza dei suoi coefficienti a zero, oppure ad un opportuno valore prefissato. Invece nel caso di un mancato soddisfacimento del test di Breusch – Pagan non è corretto eseguire il test di Fisher sopraccitato ed occorre procedere con il test di Welch – Tukey, facendo attenzione al suo opportuno adattamento al caso della regressione (essendo questo test originariamente costruito per l'uguaglianza di medie campionarie, con diversa varianza).

In entrambi i casi, è comunque necessario partire da campioni indipendenti e normalmente distribuiti. A riguardo, parecchi sono i test di normalità ed il test di Shapiro – Wilk (precedentemente illustrato) è uno di questi, essendo insieme di facile esecuzione e potente. Più complessa invece, è la verifica della mutua indipendenza dei dati, in quanto è sempre necessario definire bene lo spazio in cui si vuole provare questa indipendenza (spesso in assenza di un chiaro andamento temporale o di una chiara distribuzione spaziale o spazio – temporale di questi stessi dati).

In ogni caso, occorre costruire la/le funzione/i di autocorrelazione (ed eventualmente di cross-correlazione), verificando se queste sono bianche (segno di indipendenza) o colorate (segno di correlazione). In generale comunque, in mancanza di alcune dettagliate informazioni specifiche, si assume una (quasi) indipendenza dei dati, tenuto anche conto che le stime di covarianza sono sempre poco consistenti, in mancanza di una davvero grande abbondanza di dati. D'altra parte, fare ipotesi azzardate sulla dipendenza dei dati è peggio dell'accoglimento della loro (quasi) indipendenza.

Un'ulteriore alternativa, al test di Fisher ed al test di Welch – Tukey, è data dal test di Scheffé che stima statisticamente nulla una combinazione lineare di medie, tutte uguali tra loro (o dei coefficienti di una regressione, a loro volta, pressoché nulli), quale ipotesi fondamentale (o nulla), contro un'ipotesi alternativa che stima diversa da zero la stessa combinazione lineare. L'esecuzione del test è addirittura elementare, perché standardizzata questa combinazione lineare, con il proprio scarto quadratico medio, la distribuzione di riferimento è quella classica del t di Student.

Equazione della media o media della regressione: $\bar{y} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{x}_j$ con a_j qualsiasi j [7]

$$\bar{y} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^n \hat{a}_j \bar{x}_j$$
 [8]

Varianza del valore medio stimato $\hat{\sigma}_{\bar{y}}^2 = \sum_{j=1}^n \hat{a}_j^2 / n_j$; $\hat{\sigma}_{\bar{y}}^2 = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j^2 \hat{a}_j^2 + covarianze$ [9]

<u>Test di Scheffé</u>	ipotesi fondamentale:	$H_0: \quad i = cost \quad i$	
	ipotesi alternativa:	$H_1: \quad i \uparrow cost \quad i$	
	valore atteso:	$\hat{t} = \bar{y} / \bar{x}$	
	valore teorico:	$t ()$	
	esecuzione del test:	$ \hat{t} \leq t ()$	vale: H_0
		$ \hat{t} > t ()$	vale: H_1

Trasformazione di variabili causali:

- **teorema della/e media**
- **legge di propagazione della varianza e varianza-covarianza**

La trasformazione di variabili casuali fa passare dalla statistica descrittiva alla teoria della stima ed alle modellazioni statistiche, più sofisticate. Infatti il teorema delle medie e soprattutto la legge di propagazione della varianza-covarianza permettono di calcolare le stime dei valori medi di osservazioni indirette, come funzioni di quantità osservate, e di affiancare queste stime con metadati, per conoscere la loro precisione e la loro dipendenza interna. D'altra parte, è evidente come solo alcune grandezze possono essere oggetto di osservazioni dirette, mentre altre grandezze, spesso di grande interesse ed utilità, non lo possono essere.

- Ad una dimensione: dalla media e varianza di x a quelle di y , per mezzo dell'equazione $y = g(x)$:

input:

$$\bar{x} = E(x p(x)) \qquad \bar{y} = E(y p(y))$$
 [10]

$$\sigma_x^2 = E((x - \bar{x})^2 p(x)) \qquad \sigma_y^2 = E((y - \bar{y})^2 p(y))$$
 [11]

$$y = g(x) \quad g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) \qquad \text{nota: } E(p(x))=1 \quad E((x - \bar{x})p(x))=0$$
 [12]

output:

$$\bar{y} = E(y p(y)) = g(\bar{x})E(p(x)) + g'(\bar{x})E((x - \bar{x})p(x)) = g(\bar{x})$$
 [13]

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E((y - \bar{y})^2 p(y)) = E((g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) - g(\bar{x}))^2 p(x)) = g'(\bar{x})^2 E((x - \bar{x})^2 p(x)) = \\ &= g'(\bar{x})^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$
 [14]

- A più dimensioni: dal vettore delle medie e dalla matrice di varianza-covarianza di X al vettore delle medie ed alla matrice di varianza-covarianza di Y , per mezzo del sistema di equazioni $Y = G(X)$:

input:

$$\bar{X} = E(X p(X)) \qquad \bar{Y} = E(Y p(Y)) \qquad [15]$$

$$C_{XX} = E\left((X - \bar{X})(X - \bar{X})^T p(X)\right) \qquad C_{YY} = E\left((Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^T p(Y)\right) \qquad [16]$$

$$Y = G(X) \quad G(\bar{X}) + J(\bar{X})(X - \bar{X}) \quad \text{con} \quad J = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \quad i, j \quad \text{matrice Jacobiana} \qquad [17]$$

output:

$$\bar{Y} = E(Y p(Y)) \quad G(\bar{X})E(p(X)) + J(\bar{X})E((X - \bar{X})p(X)) = G(\bar{X}) \qquad [18]$$

$$C_{YY} = E\left((Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^T p(Y)\right) = E\left(G(\bar{X}) + J(\bar{X})(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T J(\bar{X})^T G(\bar{X})\right) p(x) \\ = J(\bar{X})E\left((X - \bar{X})(X - \bar{X})^T p(x)\right)J(\bar{X})^T = J(\bar{X})C_{XX}J(\bar{X})^T \qquad [19]$$

e, semplificando la notazione, per il caso lineare ($Y = AX + B$):

$$\bar{Y} = A\bar{X} + B \qquad C_{YY} = AC_{XX}A^T \qquad [20]$$

ovvero in termini algebrici ⁶:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i + b \qquad y \qquad [21]$$

$$y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_i a_j x_i x_j \qquad y \qquad [22]$$

$$y^z = \sum_{i=1}^n a_i b_i x_i^z + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (a_i b_j + b_i a_j) x_i x_j \qquad y, z > y \qquad [23]$$

dove le espressioni algebriche della varianza e della covarianza sono ricavabili, avendo riscritto:

$$C_{YY} = AC_{XX}A^T \qquad \text{vec}(C_{YY}) = (A \quad A)\text{vec}(C_{XX}) \qquad [24]$$

con vec operatore che trasforma una matrice in un vettore prodotto di Kronecker: $A \quad B = [a_{ij}B] \quad i, j$

Un esempio numerico elementare permette di mettere in pratica la teoria statistica.

MEDIE X	MATRICE VAR-COV. X		
1	0.1	0.01	0
0		0.1	0.01
-1			0.1

⁶ Le espressioni algebriche del caso lineare si adattano anche al caso non-lineare, con la ridefinizione dei loro termini.

SISTEMA DI EQ	MATRICE DEI COEF.		
$y=x(1)+x(2)+x(3)$	1	1	1
$y=x(1)-x(2)+x(3)$	1	-1	1
$y=x(1)+x(2)-x(3)$	1	1	-1
$y=x(1)-x(2)-x(3)$	1	-1	-1

MEDIE Y	VAR. Y	COVARIANZE Y	
0	0.34	0.1	0.12 -0.12
0	0.26	-0.08	0.08
2	0.3	0.1	
2	0.3		

MATRICE VAR-COVARIANZA Y

0.34	0.1	0.12	-0.12
	0.26	-0.08	0.08
		0.3	0.1
			0.3

Un esempio geometrico reale permette invece di valutare le capacità del metodo statistico. Infatti dovendo misurare alcune caratteristiche geometriche di un rettangolo, è immediato misurarne direttamente i due lati (avendo assunto che, per costruzione, è retto l'angolo compreso), meno agevole è misurarne il perimetro e soprattutto l'area, mentre la diagonale potrebbe essere meno accessibile e per l'angolo, sotteso da questa, si deve ricorrere ad un altro strumento di misura. A riguardo, misurati i lati e calcolate le loro medie, occorre definire i loro errori di misura, in base a considerazioni operative ed alla letteratura specialistica. Dopodiché in generale, si assumono tutte indipendenti le osservazioni dirette, soprattutto se la precisione di queste non è eccessiva e tale da far supporre la presenza di piccoli errori sistematici o pseudo – sistematici nascosti.

❑ Osservazioni dirette:

- ❑ lato maggiore: $a = 4$
- ❑ lato minore: $b = 3$

❑ Varianze delle osservazioni dirette: $\frac{2}{a} = \frac{2}{b} = 0.02$

❑ Osservazioni indirette: (derivate parziali)

- ❑ perimetro: $2p = 2a + 2b$ $\frac{\partial(2p)}{\partial a} = 2$ $\frac{\partial(2p)}{\partial b} = 2$
- ❑ Area: $A = ab$ $\frac{\partial A}{\partial a} = b$ $\frac{\partial A}{\partial b} = a$
- ❑ diagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{a}{d}$ $\frac{\partial d}{\partial b} = \frac{b}{d}$
- ❑ tangente dell'angolo: $t = \tan = b/a$ $\frac{\partial t}{\partial a} = \frac{t}{a}$ $\frac{\partial t}{\partial b} = \frac{t}{b}$

❑ Varianze delle osservazioni indirette:

- ❑ perimetro: $\frac{2}{2p} = 2^2 \cdot 0.02 + 2^2 \cdot 0.02 = 0.16$

- Area: $\frac{2}{A} = b^2 \cdot 0.02 + a^2 \cdot 0.02 = 3^2 \cdot 0.02 + 4^2 \cdot 0.02 = 0.50$
- diagonale: $\frac{2}{d} = \frac{a}{d} \cdot 0.02 + \frac{b}{d} \cdot 0.02 = \frac{4^2}{5^2} \cdot 0.02 + \frac{3^2}{5^2} \cdot 0.02 = 0.02$
- tangente dell'angolo: $\frac{2}{t} = \frac{t}{a} \cdot 0.02 + \frac{t}{b} \cdot 0.02 = \frac{3^2/4^2}{4^2} \cdot 0.02 + \frac{3^2/4^2}{3^2} \cdot 0.02 = 0.0019_{53125}$

□ Covarianze delle osservazioni indirette:

- perimetro/Area: $_{2pA} = 2b \cdot 0.02 + 2a \cdot 0.02 = 2 \cdot 4 \cdot 0.02 + 2 \cdot 3 \cdot 0.02 = 0.28$
- perimetro/diagonale: $_{(2p)d} = 2 \frac{a}{d} \cdot 0.02 + 2 \frac{b}{d} \cdot 0.02 = 2 \frac{3}{5} \cdot 0.02 + 2 \frac{4}{5} \cdot 0.02 = 0.056$
- perimetro/tangente: $_{(2p)t} = 2 \frac{t}{b} \cdot 0.02 + 2 \frac{t}{a} \cdot 0.02 = 2 \frac{4/3}{3} \cdot 0.02 + 2 \frac{4/3}{4} \cdot 0.02 = 0.0044_{(44)}$
- Area/diagonale: $_{Ad} = b \frac{a}{d} \cdot 0.02 + a \frac{b}{d} \cdot 0.02 = 3 \frac{4}{5} \cdot 0.02 + 4 \frac{3}{5} \cdot 0.02 = 0.096$
- Area/tangente: $_{At} = b \frac{t}{a} \cdot 0.02 + a \frac{t}{b} \cdot 0.02 = 3 \frac{3/4}{4} \cdot 0.02 + 4 \frac{3/4}{3} \cdot 0.02 = 0.0087_5$
- diagonale/tangente $_{dt} = \frac{a}{d} \frac{t}{a} \cdot 0.02 + \frac{b}{d} \frac{t}{b} \cdot 0.02 = \frac{4}{5} \frac{3/4}{4} \cdot 0.02 + \frac{3}{5} \frac{3/4}{3} \cdot 0.02 = 0$

Una puntigliosa precisazione segnala che le entità numeriche delle lunghezze dei lati, come quelle delle loro precisioni (qui espresse rispettivamente in m e m^2), non sono compatibili con una qualsiasi tecnica di misurazione, accurata, precisa ed affidabile. Infatti un errore relativo pari al 4% è sicuramente eccessivo; tuttavia questa scelta numerica evita la scrittura di numeri insieme troppo grandi e troppo piccoli, e facilita quella lettura statistica, appositamente voluta, dell'esempio geometrico.

Co-regressione

Il trattamento di osservazioni cross-correlate richiede sempre soluzioni a passi preliminari ed algoritmi e/o procedure un po' più complesse, rispetto ai noti casi semplici, più comuni. A riguardo, ormai classici sono la collocazione cross-correlata ed il co-Kriging, possibili dove una grande quantità di informazione permette di stimare, in precedenza, rispettivamente le funzioni di auto-covarianza e quelle di cross-covarianza, ed i semi-variogrammi semplici e cross-correlati. Invece quando l'informazione, cioè i dati a disposizione, sono in numero piuttosto contenuto, in generale, è possibile calcolare solo una covarianza generale che leghi i dati, a due a due, senza correlarli, né cross-correlarli spazialmente e/o temporalmente (oppure secondo qualche altro parametri ordinatore). Infatti come noto, la consistenza delle stime, per queste funzioni, richiede oltre un centinaio di dati (meglio se alcune centinaia e sicuramente almeno una cinquantina), cosicché in mancanza di questi numeri è solo possibile calcolare regressioni incrociate. D'altra parte, considerazioni di buon senso portano poi proporre il calcolo di una co-regressione, dove tutte le variabili dipendenti sono spiegate in funzione delle stesse variabili indipendenti, tenendo comunque conto della correlazione presente e stimata, in precedenza (tra queste variabili dipendenti). In questo modo, è possibile calcolare i parametri della co-regressione, l'interpolazione dei dati (entrambi con le loro precisioni associate), nonché gli intervalli fiduciarci, per effettuare i test statistici necessari, dato un certo modello funzionale, costruito ad hoc un opportuno modello stocastico ed assunto, quale il criterio di stima, il metodo dei minimi quadrati od una determinata procedura robusta:

□ modello funzionale: $\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ dove: $dim(y_1) = m_1$ e $dim(y_2) = m_2$ [25]

$dim(x_1) = n_1$ e $dim(x_2) = n_2$ ⁷

□ modello stocastico: $\hat{y}_0 = \hat{y}_0^2$ dove \hat{y}_0^2 è la stima ricavata dalla regressione separata della variabile dipendente dominate

$R_{yy} = \begin{vmatrix} I & D \\ D & I \end{vmatrix}$ dove $d_{i(i+m)}$ ⁸ è la correlazione fra due var. dipendenti ⁹ [26]

cosicché si ha: $R_{yy}^{-1} = \begin{vmatrix} (I - D^2)^{-1} & D(I - D^2)^{-1} \\ D(I - D^2)^{-1} & (I - D^2)^{-1} \end{vmatrix}$ [27]

□ criteri di stima: $\frac{1}{2}(\hat{y} - y_0)^T Q_{yy}^{-1}(\hat{y} - y_0) + \lambda^T (A\hat{x} - \hat{y}) = \min$ metodo min. quadrati ¹⁰ [28]

$\frac{1}{2}(\hat{y} - y_0)^T (Q_{yy}^{-1})\hat{y} - y_0 + \lambda^T (A\hat{x} - \hat{y}) = \min$ procedura robusta ¹¹ [29]

Un esempio, tratto da un problema di ingegneria delle infrastrutture di trasporto, riporta quattro brevi serie di dati, dove la seconda e la terza serie sono messe in regressione con le altre due, risultando inoltre fra loro correlate negativamente, per un valore pari a circa il **20%**. Per questa ragione, queste due serie sono messe in co-regressione con le altre due, tenendo conto di questa correlazione e fissando, come sigma zero, quello della prima regressione separata, considerata dominate. La co-regressione fornisce così le stime dei parametri, con le loro precisioni (nello specifico, tre per ciascuna delle due serie), i corrispondenti valori interpolati, con i relativi intervalli fiduciarci (testati con la distribuzione *t* di Student), gli scarti residui (testati con la distribuzione τ di Thompson) e sigma zero della co-regressione (a sua volta, testato con la distribuzione chi quadrato).

CO-REGRESSIONE

DATI

1	0.000	62.310	1.070	0.000	11	4.000	54.520	1.150	14.966
2	1.000	60.610	1.290	3.882	12	5.000	51.150	1.250	18.153
3	2.000	57.040	1.460	7.602	13	6.000	44.860	1.270	21.217
4	0.000	65.760	1.410	0.000	14	0.000	57.200	1.120	0.000
5	1.000	64.800	1.400	3.726	15	1.000	53.390	1.200	5.136
6	2.000	60.050	1.460	7.303	16	2.000	50.950	1.250	10.065
7	0.000	59.250	1.040	0.000	17	3.000	49.840	1.300	14.806
8	1.000	66.300	1.110	3.999	18	4.000	48.290	1.330	19.405
9	2.000	54.550	1.120	7.818	19	5.000	45.960	1.380	23.608
10	3.000	54.650	1.200	11.480	20	6.000	40.000	1.410	27.652

⁷ Semplici modifiche permettono di estendere la co-regressione da due a più variabili dipendenti correlate.

⁸ La sotto-matrice *D* è diagonale, non essendo prese in considerazione cross-correlazioni fra variabili.

⁹ La stima della correlazione (costante) tra due variabili dipendenti è effettuata a partire dai loro stessi dati.

¹⁰ Il vettore λ contiene i moltiplicatori di Lagrange, necessari per il calcolo di un minimo (od un massimo) vincolato.

¹¹ La funzione λ modifica opportunamente la matrice di covarianza delle osservazioni (e quella dei pesi, nel caso di dati incorrelati), al fine di permettere una soluzione iterativa della procedura robusta, tramite l'applicazione non-lineare del metodo dei minimi quadrati.

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE (1° E 2° GRUPPO) -0.196
 SIGMA ZERO REGRESSIONE SEPARATA DOMINANTE 2.885

SOLUZIONE E SQM (1° E 2° GRUPPO)

1	62.481	0.840	1.207	0.840
2	2.024	1.310	-0.040	1.310
3	-1.221	0.309	0.015	0.309

INTERPOLAZIONE (1° E 2° GRUPPO) E TEST T DI STUDENT: 2.140

DATI INTERPOLATI, INTERVALLI FIDUCIARI E SCARTI STANDARD

1	62.481	60.513	64.107	0.077	1.207	-0.727	4.050	0.062
2	59.763	59.195	62.025	0.371	1.225	-0.125	4.091	0.029
3	57.244	55.771	58.309	0.089	1.241	0.191	4.193	0.095
4	62.481	63.963	67.557	1.477	1.207	-0.387	4.390	0.092
5	59.953	63.365	66.235	2.129 *	1.222	-0.035	4.211	0.078
6	57.609	58.689	61.411	1.068	1.236	0.099	4.236	0.098
7	62.481	57.453	61.047	1.455	1.207	-0.757	4.020	0.075
8	59.620	64.896	67.704	2.929 *	1.227	-0.294	3.906	0.051
9	56.979	53.333	55.767	1.054	1.244	-0.097	3.829	0.054
10	54.530	53.274	56.026	0.052	1.259	-0.176	3.983	0.026
11	52.296	52.667	56.373	1.006	1.271	-0.703	4.156	0.055
12	50.428	48.562	53.738	0.354	1.279	-1.338	4.599	0.014
13	48.709	41.420	48.300	2.204 *	1.285	-2.170	5.018	0.008
14	62.481	55.403	58.997	2.379 *	1.207	-0.677	4.100	0.039
15	58.232	51.871	54.909	2.138 *	1.243	-0.319	4.050	0.019
16	54.235	49.343	52.557	1.459	1.277	-0.357	4.141	0.012
17	50.469	47.924	51.756	0.286	1.308	-0.616	4.336	0.004
18	46.874	45.967	50.613	0.671	1.337	-0.993	4.555	0.003
19	43.765	43.327	48.593	1.081	1.360	-1.253	4.750	0.010
20	40.850	37.040	42.960	0.440	1.381	-1.550	4.933	0.015

SIGMA ZERO E TEST CHI**2 2.374 23.014 5.630 26.100

Inventare la verità¹²

La conquista della verità passa certamente attraverso la conquista della giustizia che, a sua volta, necessita della capacità di riconoscere la bontà, in generale, collegata infine alla bellezza (perché se esiste anche un brutto – bello, questo brutto è solo un bello strano, stupefacente e raro, mentre quello veramente brutto è quasi sempre cattivo, spesso anche ingiusto e sostanzialmente falso). In questo modo, poiché la concezione del bello è largamente soggettiva ed opinabile, grandi spazi si aprono alla libertà di decisione (pur avendo, quasi sempre, abbastanza chiaro ciò che è brutto, cattivo, ingiusto e falso). Le probabilità, assegnate alle cose, agli eventi ed alle idee, diventano uno strumento di giudizio, per porre correttamente i confini di queste libertà, come nei limiti dati dalle libertà degli altri e nella condivisione di una sufficiente equità (collettiva).

Il bisogno di chiarezza nel pensiero filosofico e scientifico non è mai apparso tanto essenziale quanto appare oggi. l'analisi critica più approfondita dei concetti intuiti apparentemente più chiari non può più essere considerata un gioco per sofisti ma è una delle questioni da cui dipende il progresso della conoscenza (Bruno De Finetti, La logica dell'incerto).

¹² Questo paragrafo è liberamente ripreso da: L'invenzione della verità, di Bruno De Finetti (Raffaello Cortina Ed., Milano, 2006).

Alla logica matematica (in particolare: la teoria della definizione nominale) e alla critica positiva del mondo empirico ... si aggiunse ... , terzo e definitivo caposaldo, ... il probabilismo. Che corregge e integra gli altri due nei punti che non potevo accettare: quelli in cui una cosa qualunque sembrava doversi considerare dotata d'un valore assoluto (Bruno De Finetti, op. cit.).

La verità di un'asserzione, di una proposizione, si può intendere in due modi: o, in senso obiettivo, come conformità a una realtà esterna, ..., o in senso soggettivo, come conformità alle proprie opinioni, ... La logica è la scienza che dalla verità o falsità di certe premesse insegna a dedurre e concludere la verità o falsità di certe conseguenze; ... Se la verità si concepisce in senso obiettivo, la logica appare come una proprietà di cui deve godere il mondo reale, ... Se ci si limita invece all'aspetto soggettivo, la logica non riguarda che i processi mentali, ... Questa seconda accezione è più generale e più larga dell'altra, perché indipendente da ogni particolare precisazione del valore da dare al concetto di "vero" o "falso" ... Il calcolo delle probabilità è la logica del probabile. Come la logica formale insegna a dedurre la verità o falsità di certe conseguenze dalla verità o falsità di certe premesse, così il calcolo delle probabilità insegna a dedurre la maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe conseguenze dalla maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe premesse (Bruno De Finetti, Scritti vari).

Entrando nel mondo della scienza, delle scienze applicate e della tecnica, una logica deterministica cancella tutte le sullodate libertà ed impone ferree leggi costrittive (da cui spesso inevitabili ricadute anche nei disegni, ossessivi ed oppressivi, per tutto il mondo reale e poi giù, giù fino alla vita spicciola quotidiana). Invece una logica probabilistica assegna al dibattito, al confronto ed all'intesa, la concezione, costruzione e messa in atto di alcune scelte possibili, in un ventaglio molto più ampio (anche se senza alcuna ragionevole certezza di convergenza che ancora è solo abbastanza probabile, a sua volta, se intersoggettivamente auspicata).

La possibilità dell'invenzione di concetti fisici risiede ... nell'osservazione di certe concordanze e nella previsione del loro ripetersi in casi analoghi; ... Se le previsioni non s'avverano appieno, il concetto si deve abbandonare o modificare o sdoppiare, a seconda che le previsioni falliscano in pieno, o in questioni di dettaglio, o in una parte dove si noti invece qualche concordanza nuova su cui inventare un nuovo concetto (Bruno de Finetti, L'invenzione della verità).

La causalità ... è un presupposto necessario a priori per poter costruire una scienza: come potrei scoprire delle regolarità e delle leggi se concepissi tutto come in balia del caso e non fossi guidato da questa certezza? come potrei ricavare, dall'esperienza del passato, una qualche previsione, senza questo principio che m'assicuri che quanto è avvenuto è avvenuto per cause che si ripeteranno ... (Bruno De Finetti, op. cit.).

(Una logica probabilistica) non dovrebbe essere considerata come una teoria ausiliare per quelle branche della scienza che non hanno ancora scoperto meccanismi deterministici che pur devono esistere; essa deve essere invece considerata come la premessa logica dell'intero ragionamento induttivo. Così come l'ordinaria logica a due valori è lo strumento necessario di ogni ragionamento in quei casi in cui è pertinente soltanto il realizzarsi oppure no di un evento, così la logica del probabile, la logica di una scala continua di valori, è lo strumento necessario di ogni ragionamento in cui entra, in modo esplicito o implicito, un grado di dubbio, un giudizio di certezza, pratica o di impossibilità pratica o infine una stima della verosimiglianza di un evento qualsiasi. Questo calcolo costituisce perciò il fondamento della maggior parte del nostro pensiero per cui possiamo ripetere ...: senza di esso la scienza sarebbe impossibile (Bruno De Finetti, La logica dell'incerto).

Una logica probabilistica inventa assiomaticamente la probabilità, quale modello interpretativo, e la fa poi incontrare con i risultati degli esperimenti, con un approccio sequenziale, almeno nelle

intenzioni. Infatti sono sequenziali i test Bayesiani (privilegiati nell'approccio di Bruno De Finetti), ma possono essere sequenziali anche i test frequentisti (privilegiati invece nell'approccio di Percy Williams Bridgman, metrologo e fisico americano, Premio Nobel per la fisica). In ogni caso, la logica probabilistica offre un modello per interpretare i risultati di esperimenti, con probabilità modello, grazie all'identità formale fra variabili statistiche (empiriche) e variabili causali (teoriche), cosicché le supposte leggi (geometriche, fisiche, ecc.) sono cercate, costruite e validate, e non assunte a priori, in base a ragionamenti arbitrari.

Questo non porta a distruggere la scienza, porta soltanto a una diversa concezione della scienza ... Se cade infranto il freddo idolo marmoreo di una scienza perfetta, eterna e universale, ... ecco in sua vece al nostro fianco una creatura viva, la scienza che il nostro pensiero liberamente crea. ... La nozione di probabilità come un *deus ex machina* scaturito da ragionamenti astratti (... è una creatura viva: carne della nostra carne, frutto del nostro tormento, compagna nella lotta e guida alla conquista (Bruno De Finetti, op. cit.).

L'analisi logica che ritengo più utile è perciò quella che sviscera un concetto approfondendo l'esame di come e perché ci può essere sembrato utile inventarlo, l'esame delle ipotesi da cui dipende e delle possibilità di smentita. Il seme contenuto in ogni progresso rivoluzionario della scienza troverebbe allora nella filosofia un terreno fertile aperto a riceverlo e svilupparlo, anziché una pietra cristallizzata che esso debba, come finora, sgretolare con la sua vitalità prepotente per potervi attecchire (Bruno De Finetti, L'invenzione della verità).

Dobbiamo inventare il mondo per inquadrarvi le nostre sensazioni, ma non dovremmo mai considerarlo come uno schema rigido e fisso, come una costruzione definitiva: esso non è che il risultato provvisorio di uno sforzo di sintesi. le nostre sensazioni, i nostri concetti fondamentali, a cominciare da quelli di tempo e di spazio, non mai i protagonisti di una commedia finita ove ciascuno ha la sua parte e il suo ruolo, saranno sempre i "sei personaggi in cerca d'autore (Bruno De Finetti, op. cit.).

Questa logica è, per lo più, la logica della congettura e della confutazione, dove alla ricerca e costruzione di un'ipotesi, segue la sua validazione (o meglio la sua corroborazione con i risultati degli esperimenti), oppure la sua confutazione (a causa di un contro-esempio convalidato). A riguardo, si osservi come proprio questa doverosa convalidazione dei contro-esempi imponga comunque l'assunzione di un principio d'induzione, qui usato a rovescio, rispetto al loro uso classico, nella validazione frequentista (avvicinando un po' due modalità operative / scuole di pensiero, teoricamente ben contrapposte).

La scuola di pensiero Bayesiana ha tra i suoi più importanti componenti Bertrand Arthur William Russell (matematico, logico e filosofo) e Karl Raimund Popper (logico, filosofo e sociologo), quella frequentista Hans Reichenbach (empirista logico, membro del Circolo di Berlino) e Rudolf Carnap (neopositivista, membro del Circolo di Vienna). Ludwig Josef Johann Wittgenstein è una figura intermedia, in quanto il suo Trattato logico-filosofico aderisce pienamente alle tesi russelliane, mentre le sue successive Ricerche filosofiche (pubblicate postume) sono un significativo compromesso pratico, fra le due tesi contrapposte.

Cenni sul Neocriticismo¹³

Il Neocriticismo è una rilettura, attenta e puntuale, del pensiero kantiano, presente nelle sue sintesi critiche, di fronte ai grandi cambiamenti teorici, formulati dalle geometrie non-euclidee, dalla Teoria della Relatività e dalla psicanalisi. In questa prospettiva, anche la fisica dei quanti e la

¹³ Questo paragrafo è liberamente ripreso da: I problemi filosofici della Teoria della Relatività, di Ernst Cassirer (a cura di Renato Pettoello, Mimesis / Ricercare, Milano / Udine, 2015).

cosmologia, successive allo sviluppo del Neocriticismo, ben si inseriscono, come elementi complementari, dove l'ampliamento delle conoscenze scientifiche non inficia il riferimento filosofico, perché "liberare il quadro dell'universo da questa unilateralità, è il compito della filosofia sistematica (Ernst Cassirer, I problemi di filosofici della Teoria della Relatività).

La trattazione filosofica di una teoria fisica non può mirare a innalzare un criterio proprio e indipendente per la valutazione del suo contenuto che possa affiancarsi con uguale diritto ai criteri che la singola scienza stessa stabilisce. perché il contenuto di una teoria fisica è soggetto soltanto ad una singola regola che deriva puntualmente dalla metodica della fisica in quanto tale. Accanto a questa norma non vi è spazio per un altro modo speculativo di trattazione (Ernst Cassirer op. cit.).

Quello che infatti risulta veramente oggettivo alla conoscenza moderna della natura, non sono tanto le cose quanto piuttosto le leggi. Pertanto il variare degli elementi dati dall'esperienza e il fatto che ciascuno di essi non sia mai dato in sé ma sempre solo in relazione ad altri, non costituisce obiezione di sorta contro la possibilità di una conoscenza reale-oggettiva solo in quanto per l'appunto non variano le leggi di queste stesse relazioni. Si lasciano cadere la costanza e l'assolutezza degli elementi per ottenere in cambio la costanza e la necessità delle leggi (Ernst Cassirer, Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna).

Interessante è qui il bilanciamento fra il rispetto totale della scienza, in quanto costruttrice e depositaria delle sue teorie, delle sue esperienze e delle sue leggi, e la necessità di rileggere la scienza (o meglio, il coacervo delle scienze e, ormai oggi, anche delle scienze applicate e delle varie tecniche), interpretandola alla luce di un contesto culturale (ivi compresa la produzione artistica), ideologico (esteso al pensiero religioso), sociale, politico ed economico. Infatti qualsiasi scienza e tantomeno ogni scienza applicata ed ogni tecnica non sono mai neutre, ma giocoforza collegate alla realtà che le ha prodotte.

Non si tratta di mostrare gli ultimi e assoluti elementi della realtà, nella cui considerazione il pensiero possa per così dire acquetarsi, ma di un processo progressivo e senza fine, in virtù del quale il relativamente necessario sottentra in luogo del relativamente contingente, il relativamente invariabile in luogo del relativamente variabile. Mai si può affermare che questo processo è definitivamente giunto fino a quelle ultime invarianti dell'esperienza, che ormai sottentrano in luogo dell'immutabile realtà delle cose (Ernst Cassirer, Filosofia delle forme simboliche).

Il nucleo centrale via, via adottato del pensiero si sposta sempre di nuovo; ma al tempo stesso soltanto in questo progredire il pensiero colma sempre più l'ambito dell'essere, la sfera della conoscenza oggettiva. Ogni qual volta il pensiero sembra scardinato da fatti nuovi e osservazioni che si sottraggono alle leggi da esso formulate fin qui, altrettante volte è chiaro che in realtà in quei nuovi fatti esso ha trovato un nuovo cardine, su cui d'ora innanzi s'impenna e gira la totalità dei fatti sperimentali (Ernst Cassirer, I problemi di filosofici della Teoria della Relatività).

In questo modo, è possibile comprendere i labirinti della ricerca scientifica, dalla formulazione delle teorie (come quella eliocentrica copernicana e quella evolucionista darwiniana), all'invenzione di corpi e sostanze sconosciuti/e, capaci di interpretare anomalie (come l'invenzione dell'ossigeno, per spiegare la combustione dei metalli, e la previsione di Nettuno, per giustificare l'orbita di Urano, in base alla legge di Newton), ma anche una scoperta fortuita, come quella della penicillina (quando una muffa vegetale si dimostra capace di inibire la crescita di una coltura batterica).

Per completezza, è qui conveniente inquadrare il pensiero, espresso nelle sintesi critiche Kantiane, nel suo periodo storico, fra il culmine dell'Illuminismo ed il sorgere del Romanticismo. Infatti il primo, antecedente la Rivoluzione francese e l'avventura napoleonica, è sostenuto dall'ottimismo in

base al quale l'umanità intera, liberata dai ceppi di un passato oscuro, cammina spedita, verso un futuro luminoso, di sviluppo e progresso. Invece il secondo, succube sofferente della Restaurazione (comunque posteriore alla scomparsa di Kant), è afflitto da dubbi profondi, nei confronti di un futuro, piuttosto incerto.

A riguardo, eloquenti sono i due dipinti sottostanti, dove alla quiete olimpica del primo (con saggi che stanno ad ascoltare la lettura di un'opera di un loro pari), si contrappone una drammatica esperienza di vita (dove la navigazione di temerari, con un precario mezzo di fortuna, tenta la sorte). L'ottocento idealista offusca un po' il pensiero kantiano (comunque sempre vivo fra matematici e scienziati, dello stesso periodo), ma prima il Neocriticismo e poi il Positivismo logico rimettono Kant, al centro della contesa filosofica, in vivace contrasto con tendenze filosofiche anti-scientifiche¹⁴ (quali la neoscolastica, il neoidealismo e lo storicismo).

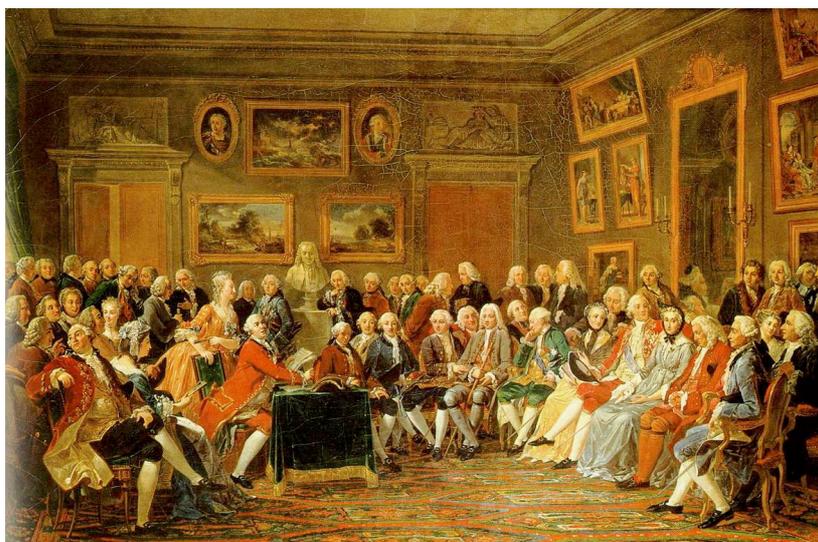


Figura 8 - Charles Gabriel Lemonnier, *Première Lecture chez Madame Geoffrin de l'Orphelin de la Chine, en 1755* (Musée des Beaux-Arts, Rouen)



Figura 9 - Jean-Louis André Théodore Géricault, *La zattera della Medusa* (Musée des Louvre, Parigi)

¹⁴ Certe correnti anti-scientifiche possono addirittura dirsi nostalgiche di una scienza antica: geocentrica, antropomorfa, teista, ecc.

Ringraziamenti – Questo lavoro origina dai corsi di Geomatica e Scienze Umane, e Trattamento delle Osservazioni del Dottorato di Ricerca in Ingegneria Ambientale e delle Infrastrutture del Politecnico di Milano: alle/agli allieve/i di questi corsi vanno i sinceri ringraziamenti degli autori.

Bibliografia di riferimento

- Amerio L. (1970), *Analisi algebrica*, Di Stefano editore, Genova.
- Amerio L. (1970), *Analisi infinitesimale* (vol. I e II), Di Stefano editore, Genova.
- Cassirer E. (2015), *I problemi filosofici della Teoria della Relatività*, a cura di R. Pettoello, Mimesis / Ricercare, Milano / Udine.
- Citrini D., Nosedà G. (1971/73), *Lezioni di Idraulica* (vol. I e II), Tamburini Editore, Milano
- De Finetti B. (2006), *L'invenzione della verità*, R. Cortina Ed., Milano.
- Finzi L., Grandori G., Locatelli P. (1972), *Lezioni di Scienza delle costruzioni*, Tamburini Editore, Milano.
- Gasapina U. (1975), *Algebra delle matrici*, Edizioni La Viscontea, Milano
- Maione U., Moisello U. (1974), *Appunti di idrologia – Introduzione alle elaborazioni statistiche*, La Goliardica Pavese, Pavia.
- Marchionna E., Marchionna Tibiletti C. (1977), *Lezioni di algebra* (vol. I e II), Edizioni La Viscontea, Milano.
- Tavasci B. (1970/71), *Tecnologia dei materiali e chimica applicata* (parte I, II e III), Tamburini Editore, Milano.
- Toniolo G., Caironi M. (1971), *Tecnica delle costruzioni*, CLUP, Milano.
- Toniolo G. (1971), *Esercitazioni di tecnica delle costruzioni – Gli elementi strutturali del cemento armato*, CELUC, Milano.
- Toniolo G. (1972), *Esercitazioni di tecnica delle costruzioni – Il calcolo elastico dei telai*, CELUC, Milano.
- Vecchia O. (1984), *Geologia generale ed applicata all'ingegneria civile*, Clupguide, Novara.